UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI SOCIALE
AMPOSDRU

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013

Instrumente Structurale
2007-2013

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
UMPFE

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Investeşte în oameni!

Formarea profesională a cadrelor didactice din învăţământul preuniversitar pentru noi oportunităţi de dezvoltare în carieră

MECANICĂ FIZICĂ

Corneliu Apostol STĂNESCU **Simona TALPOŞ**
Adrian DAFINEI

Program de conversie profesională la nivel postuniversitar pentru cadrele didactice din învățământul preuniversitar

Specializarea FIZICĂ
Forma de învățământ ID - semestrul I

2010

FIZICĂ

Mecanică fizică

Corneliu Apostol STĂNESCU   Simona TALPOŞ

Adrian DAFINEI

2010

ISBN 973-0-04252-7

INTRODUCERE

Ştim că adresăm cursul de "Mecanică fizică " unui grup (grupul ţintă) cu o pregătire iniţială foarte diferită de aceia a unui "auditoriu" tradiţional. În acelaşi timp, fiind un curs strict scris, respectiv fără participare în sala de curs şi seminar (fără partea ascultată a lui), unele aspecte "vorbite" nu pot fi transmise cu uşurinţă. Aceste motive au condus la structurarea cursului pe trei nivele.

Un prim nivel îşi propune să răspundă exigenţei ca programa să fie conformă programului facultăţii de fizică (de la Măgurele). Partea construită la acest nivel nu îţi este de utilitate directă dacă urmează să te adresezi unor elevi din clase de început în ale fizicii. Dar această parte este utilă, totuşi, sub două aspecte: îţi asigură o legătură cu materia care stă la baza predării fizicii şi totodată ţi-ar putea permite să răspunzi la întrebările unui elev mai curios (sau mai îndrăzneţ). De fapt acest mod arată calea ce ar trebui căutată pentru a putea răspunde unor exigenţe ce îţi depăşesc necesarul imediat. Sub acest aspect, cursul se înscrie în modul de prezentare "mecanică vectorială", cu unele subcapitole şi chiar cu unele deduceri mai speciale, "cedate" capitolelor de mecanică analitică sau de electrodinamică.

Un al doilea nivel conţine câteva "pachete" în care lucrurile (cunoştinţele) sunt expuse mai aproape de cum ar putea fi ele predate unor elevi. Cursul nu a putut să se axeze numai pe acest mod de prezentare cel puţin din motivele expuse anterior. Am încercat în acest mod şi unele exprimări mai moderne, mai la zi, inclusiv ale unor cunoştinţe de bază care au rămas câte odată prea istorice. Pentru cursanţii care vor dori să aleagă acest curs, sub conducerea celor care l-au redactat, există pregătită o dezvoltare a acestui mod precum şi un pachet de posibile lucrări practice foarte la îndemâna profesorului de fizică. Aceste lucrări practice sunt gândite astfel încât să poată fi realizate doar cu puţină iniţiativă, ceva entuziasm şi mijloace (materiale) care se găsesc în apropierea noastră. Modulul de "mecanică" permite din fericire acest lucru, care fără îndoială nu este la îndemâna modulului de „ fizică nucleară"! Din acest punct de vedere apropierea de cursant a mecanicii este mai mare, mai tot ce ne înconjoară la o primă percepţie, fiind "mecanică". (Dar nu numai mecanică). Varietatea de întrebări şi varietatea de probleme pe care o permite mecanica, precum şi multe din răspunsuri, pot face din această ramură şcolară o activitate prietenoasă. Prin caracterul intuitiv şi uşor de vizualizat, de perceput, poate fi într-adevăr prietenoasă.

Un al treilea nivel a stat la baza redactării foarte detaliate a câtorva din problemele propuse. Ştiind că "problemele" pun de regulă probleme şi celor care rezolvă problemele şi celor care trebuie să convingă prin soluţiile propuse, s-a încercat un fel de lecţie de rezolvare, poate unora potrivită, poate altora departe de metoda pe care ar folosi-o. Oricum acest mod ţi-ar putea da unele sugestii. Şi acest mod merită o dezvoltare mai amplă prin participarea la activitatea propusă de curs. În acest mod au fost introduse unele detalii care sunt legate de expunerea orală a materialelor.

Chiar dacă apar în mică măsură, cu ponderea posibilă a dezvoltării materialului, am dorit să sugerăm o grijă pentru pronunţia unor noţiuni sau nume proprii, o anume metodă de citire a unor expresii sau relaţii etc. Chiar dacă unora pot părea "în plus", am încercat în absenţa cursului vorbit şi ascultat, doar să sugerăm că şi la exprimarea celor predate pot să apară probleme speciale. Dacă ai fost conştientizat, mai departe poţi face apel la mentorul tău sau la un coleg mai vechi în domeniu dar şi la informarea modernă prin "internet" sau prin suporturile electronice ori digitale care îţi sunt la îndemână (casete video ori audio, CD-uri, DVD-uri etc.).

Noi am încercat să te avizăm şi sub acest aspect. În paralel, ţi-au fost sugerate unele date din istoria fizicii sau a descoperirilor respective. În funcţie de auditoriu, accentuarea unor aspecte istorice (amplificate de cel care predă) ar putea să capteze mai uşor atenţia unor elevi obişnuiţi mai mult cu disciplinele umaniste.

Poate că unele din cele introduse în curs meritau să fie în cantitate dublă ori triplă, dar cine s-ar mai fi apropiat de un curs cu un număr de pagini triplu?

Pentru a da un aspect mai prietenos (mai simpatic), mai puţin descurajant textului principal, au fost adăugate unele figuri pe banda laterală, (marginea exterioară a paginii). Această margine albă este destinată, în principal, unor notiţelor şi observaţiilor tale şi le poţi face în tot timpul parcurgerii modulului. Ca un îndemn la aceste însemnări rapide, autorii au adăugat şi ei unele comentarii, sublinieri etc. De asemenea au fost adăugate sau reluate unele desene care ar putea deveni un fel de reflexe în modul cum trebuie făcute. Şi, pentru decorarea textului au fost folosite tot figuri, desene, micşorate, preluate din textul principal.

Spaţiile albe lăsate după întrebări şi după problemele propuse sunt destinate rezolvării pe loc, soluţionării imediate a respectivei probleme. Totuşi, atunci când o rezolvare ar fi putut ocupa o pagină sau chiar 2-3, nu am mai lăsat locuri libere, pe măsură, ci te îndemnăm să apelezi la o ciornă, alăturată.

De altfel dimensiunea spaţiilor însoţitoare unui răspuns este proiectată pentru un scriitor care foloseşte „un font” obişnuit, şi guma şi un creion de 0.5!!!. Cine se ştie că are un scris mare, cu un „zoom” exagerat, nu va avea un reper corect în ceea ce priveşte amploarea unei rezolvări. Dimensiunea acestor spaţii sau în alte sisteme indicaţia numărului de cuvinte este o informaţie despre... cât de mult ar trebui să te „întinzi”. Dar, fiind la fizică, un desen ori nişte calcule pe o foaie alăturată reprezintă cel mai bun mod de a te apropia de învăţarea unui curs de fizică.

Fiecare unitate de învăţare are o aceeaşi structură. La început sunt prezentate (pe scurt) principalele obiective ale sale. La finalul parcurgerii (studierii) unităţii de învăţare poţi să încerci să vezi dacă ţi-ai atins obiectivele. Cele cuprinse în această casetă reprezintă puţin din cele din textul principal. Imediat urmează o tablă de materii locală, a unităţii de învăţare, modulul având şi o tablă de materii generală. În fiecare unitate de învăţare vei găsi 1-2 teste de autoevaluare care îţi

permit să ai un control (un autocontrol) al nivelului intermediar de percepere. Răspunsurile la aceste întrebări le găseşti în cadrul fiecărei unităţi de învăţare împreună cu trimeteri la text, adică unde ar mai trebui insistat.

Acelaşi mod de abordare există pentru problemele propuse. În cadrul unităţii de învăţare găseşti 1-2 probleme rezolvate pe care le poţi lua ca lecţii de soluţionare. Pentru cei mai avizaţi aceste rezolvări mai lungi poate vor părea plicticoase, dar am dorit ca cititorul mediu pregătit să aibă nu numai răspunsul dar şi unele detalii. Să nu uităm că este un mod de învăţare lipsit de contactul faţă în faţă profesor-elev/student. Adică lipsit de toate informaţiile care se transmit prin viu grai.

Fiecare unitate de învăţare are în cuprinsul său nişte sugestii de lucrări practice, la care
ne-am gândit că le poţi realiza pentru tine şi viitorii tăi elevi, cu mijloace „locale”. Suntem siguri că de la caz la caz poţi mult mai mult. Dacă doreşti să faci mai mult în această direcţie, tutorele, poate să te îndrume. Avantajul mecanicii şcolare este că poate fi asociată cu fenomene şi întâmplări de zi cu zi şi astfel poate aduce elevul mai repede, aproape de fizică.

Bibliografia recomandată, cu paginaţia asociată fiecărei unităţi de învăţare, este numai în limba română. Sunt cărţi şi manuale relativ răspândite în bibliotecile şcolare sau pe la cei mai vechi în acest domeniu.

Formulele mai ample precum şi demonstraţiile mai lungi, sunt puse într-un spaţiu (de)marcat. Acestea le poţi „sări”, omite la o primă parcurgere a textului, dar îţi recomandăm să le asimilezi mai târziu la o a doua parcurgere a textului, a unităţii de învăţare, dacă faci această parcurgere! Altfel, un profesor „înghesuit” de întrebările elevilor mai silitori, mai curioşi ori chiar răutăcioşi va fi, uneori, în dificultate. Desigur că accentuarea acestei pregătiri nu se face doar prin citirea textului unităţii de învăţare ci şi prin nişte ani de exercitare a aceste discipline.

Fiecare unitate de învăţare are o probă de verificare în relaţia cu tutorele. Punctajul asociat problemelor sau întrebărilor este o bună orientare a ponderii lor în tema respectivă. Am mers pe ideea de nota 10 cu un punct din oficiu, pentru că acesta este sistemul cu care suntem cel mai mult obişnuiţi. Modulul este conceput, ca toate modulele din acest pachet, independent. În cadrul modulului, am încercat şi o evoluţie cantitativă de la unitate de învăţare la unitate de învăţare, ele fiind oarecum în progresie aritmetică.

Avantajul modulului Mecanică Fizică este că se situează la începutul studiului, dar fiind la fizică, este greu să ne lipsim de puţină algebră, puţină geometrie, puţină trigonometrie sau chiar puţină analiză matematică. Aceste noţiuni le regăseşti în celelalte module, dar şi în manualele şcolare mai vechi (sau mai noi). Există (cel puţin) o unitate de învăţare mai dificilă. Ca şi în cazul formulelor mai ample, poate fi evitată la o primă parcurgere. Am încercat în cadrul unităţii de învăţare o buclă: prezentarea unei idei, deduceri asociate şi revenirea la ideea iniţială. Nu de fiecare dată s-a putut sau s-ar fi potrivit.

Şi mai intervine dimensiunea pe care ar fi putut-o lua modulul scris. Dacă tot ce am fi dorit să-ţi transmitem ar fi fost pus în pagină, am fi ajuns la, poate, 3-400 de pagini. Utile. Dar cine s-ar mai fi apropiat de un curs de 400 de pagini
Forma de evaluare este de *Examen.* Tutorele va evalua activitatea din întregul semestru, luând în considerare răspunsurile la *testele de evaluare* propuse la sfârşitul fiecărei unităţi de învăţare. De asemenea, la sfârşitul semestrului, vei prezenta un *proiect* pe care-l vei construi pe o temă propusă de tutore. *Lucrările de verificare* de la sfârşitul fiecărei unităţi sunt concepute astfel încât răspunsurile să constituie proiecte care să îţi aparţină şi care se vor regăsi în proiectul final. În *aprecierea finală a activităţii*, activitatea din timpul semestrului şi calitatea proiectului, vor contribui în *proporţii egale*. Absolvirea acestui modul îţi va aduce *6 credite*.

Cursul conţine *şapte Unităţi de învăţare* . Fiecare Unitate de învăţare are scopuri definite la început în cadrul *Obiectivelor unităţii.* Ţi se spune ce competenţe se aşteaptă să capeţi prin parcurgerea fiecărei Unităţi.

 Această pictogramă marchează competenţele pe care trebuie să la capeţi.

Încadrarea laterală a unor porţiuni de text sau de calcule, indică un grad sporit, dar nu de neînţeles, de dificultate, fără de care înţelegerea unitară a temei nu este posibilă.

Pagina este prevăzută cu o *manşetă albă*, în care cel mai adesea este plasată o pictogramă sugestivă pentru subiectul tratat, sau vei găsi o adnotare a autorilor, conţinând o precizare, o definiţie sau o generalizare a problemei tratate. Nu te sfii, ca în această manşetă să treci propriile-ţi adnotări, care să conţină demonstraţii, întrebări, obiecţii. Acestea vor constitui pretextul contactului permanent cu tutorele.

La sfârşitul fiecărei Unităţi de învăţare ai *teste de verificare,* uşoare dacă ai citit cu atenţie întregul capitol.

Pictograma alăturată este plasată în dreptul testului de verificare. Fiecare test are răspunsuri corecte. Dacă răspunsurile tale nu coincid cu acestea, trebuie să reciteşti întregul capitol, sau numai paragrafele indicate de autor. La sfârşitul fiecărei. Unităţi ţi se propune o *lucrare de verificare*, pentru care nu ai răspunsuri, deoarece trebuie să la găseşti singur. După ce le-ai găsit şi eşti sigur de ele, trimite-le tutorelui pentru verificare.

În zona Lucrării de verificare o să întâlneşti o pictogramă cu semnul scrisorii electronice. Fiecare Unitate de învăţare se încheie cu o *Bibliografie,* pe care o considerăm suficientă pentru obiectivele propuse. Pentru lămuriri suplimentare, ca şi pentru dorinţa de a elucida probleme care depăşesc cadru cursului, ne va face plăcere să oferim consultaţii, dacă vom fi solicitaţi la adresele :
"Cornel Stănescu" apocas@yahoo.com,
"Talpos Simona" stalpos@yahoo.com,
„Adrian Dafinei” asdafinei@yahoo.com

Bibliografie generală

1.A. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a)

2.A. P. Hristev, V. Fălie, D. Mande, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984

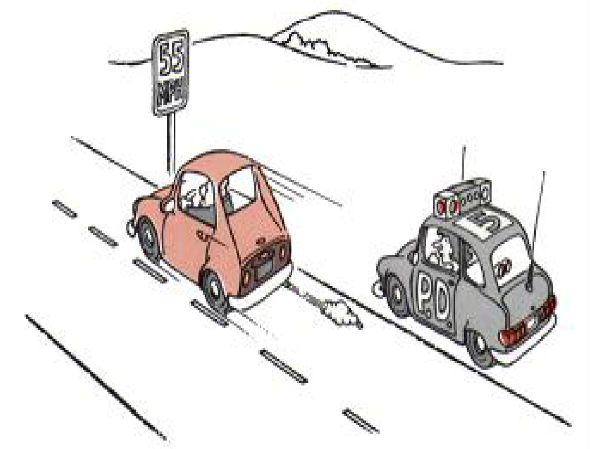
3.***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983
4. David J.McGill, Wilton W.King, Engineering MECHANICS, an Introduction to Dynamics, PWS Engineering, Boston
5.Frank S. Crawford, Waves, BerkeleyPhysics Course, McGraw, Hill
6. Raymond Serway, Physics for Scientist and Engineers, Saunders Golden Sunburst Series
7. OHanian, Physics, Norton Company
8. http://www.referat.ro/referate/fizica/

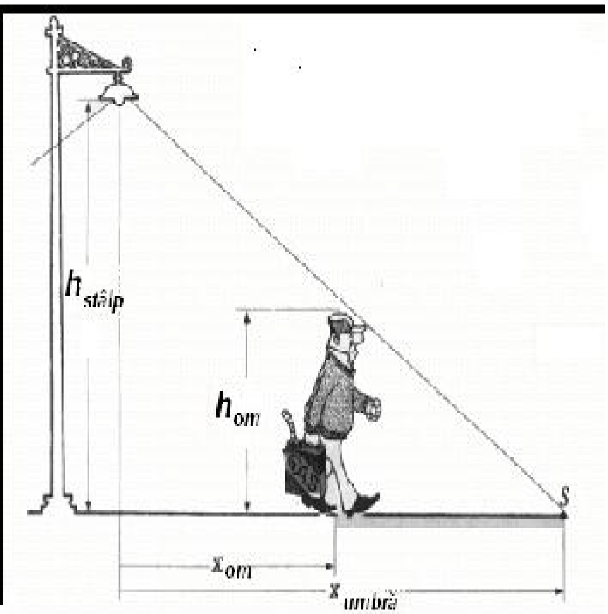
Cuprins

Unitatea de învăţare 1

CINEMATICA

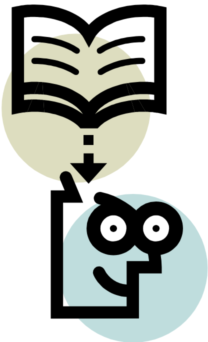
Cuprins **Pagina**





Gândeşte-te cum se mişcă automobilul urmărit faţă de marginile şoselei; gândeşte-te şi la mişcarea maşinii poliţiei. Gândeşte-te cum se mişcă cele două maşini una faţă de alta. Gândeşte-te şi la felul în care se mişcă omul şi la modul în care se mişcă umbra acestuia.

1.1. *Obiectivele unităţii de învăţare 1- Cinematica*



Când vei termina de studiat acest capitol vei fi capabil :

- *să descrii o mişcare uniformă folosind limbajul adecvat*
- *să defineşti viteza medie*
- *să ştii ce este viteza momentană*
- *să defineşti mişcarea accelerată*
- *să poţi face măsurările necesare şi să calculezi viteza medie a unui vehicul.*

1.2. *Scalari şi vectori*

În practică (şi în fizică, desigur) se constată că unele noţiuni sau unele efecte nu sunt suficient caracterizate prin "mărimea" mărimilor respective. Este cazul cel mai evident al vitezei. Este important cât de repede se mişcă un autoturism, dar nu ne este indiferent dacă vine spre tine sau se îndepărtează. La fel cum nu este indiferent dacă vine direct spre tine sau va trece pe alături.

Te va interesa deci - pentru o caracterizare completă a unor mărimi - şi **direcţia,** dar şi **sensul** său (al vitezei în exemplificarea de mai sus).
Acest fel de **mărimi fizice**, caracterizabile **neapărat** prin **modul** (fără modul restul discuţiei dispare, un vector zero nu are nici direcţie, nici sens) dar şi prin **direcţie** şi prin **sens,** şi câteodată şi prin **punctul de aplicaţie,** sunt **mărimi vectoriale**.

> ***Scalarii*** *sunt mărimi perfect caracterizate printr-un singur număr – valoarea lor*
> ***Vectori****i sunt mărimi fizice care sunt caracterizate prin* ***modul direcţie*** *şi* ***sens****. Uneori descrierea presupune cunoaşterea* ***punctului de aplicaţie*** *al vectorului*

În fizica şcolară vectorii la care punctul de aplicaţie este important am putea spune că nu apar. Totuşi greutatea este prin excelenţă un vector

care se aplică în ***centrul de greutate*** chiar dacă în mai toate problemele este perfect reprezentat ca un *vector alunecător*.

Vectorul alunecător poate aluneca pe dreapta lui suport dar nu pe o dreaptă paralelă cu aceasta

Un **vector alunecător** este vector care poate fi aşezat oriunde pe dreapta lui suport (**dar nu pe o dreaptă paralelă cu aceasta - o dreaptă translatată**) fără a modifica efectul său. Greutatea este din acest punct de vedere un perfect vector alunecător pentru problemele din şcoală. Însă greutatea se aplică în acelaşi punct şi dacă rotim corpul, şi anume ***în centrul său de greutate***, invariant pentru o anumită **geometrie a corpului.**

*Dar cel mai frecvent vector cu punct de aplicaţie, chiar dacă trece nebăgat în seamă, este **vectorul de poziţie**, a cărui origine porneşte din originea axelor alese.*

În oricare domeniu de activitate există un „jargon specific”. Cuvintele pot avea înţelesuri speciale. Scrierea este una dintre „sculele” cele mai importante pentru meseria de profesor. Să nu pierzi niciodată din vedere proprietatea cuvintelor pe care le foloseşti când vorbeşti sau scrii.
În şcoala românească vectorii se notează cu săgetă superioară. Merită "un răgaz" pentru acest detaliu, care creşte eleganţa exprimării dar şi impune o anumită ţinută. Pe de altă parte o simplă liniuţă deasupra înseamnă altceva, **valoarea medie**.

$\vec{V}$

Vector
Pentru caracterizare
- Modul
- Direcţie
- Sens
- Punct de aplicaţie

Pentru a evita multe confuzii dar şi din observaţia că prescurtările sunt adeseori sursele unei învăţări mai dificile, am folosit indicii explicativi exprimaţi complet. Acolo unde am considerat util – dar neapărat numai acolo – am pus paranteze însoţite de indicii explicativi, de exemplu $(v^2)_{mediu}$ sau altceva.

Adeseori în aceeaşi expunere sau în aceeaşi rezolvare apare T, tensiunea în fir şi T, perioada de oscilaţie, dar poţi nota, fără jenă, $T_{tensiune}$ respectiv $T_{perioadă}$, aceasta pentru a nu strica unele notaţii tradiţionale şi sugestive de altfel. Situaţii asemănătoare , care trebuie semnalate pentru a elimina confuzia sunt numeroase. De exemplu L pentru lucru mecanic şi L pentru modulul vectorului moment cinetic, $\vec{L}$ etc. (Densitatea şi rezistivitatea, sunt ambele notate de regulă cu litera grecească *rho* ρ; viteza luminii, căldura specifică şi viteza sunetului se notează toate cu *c*, etc.) De regulă se acordă prioritate notaţiei proprii capitolului respectiv iar celelalte mărimi se notează diferit ori cu indicii explicativi **până la eliminarea oricărei confuzii**.

$\overline{M}$

Valoare medie

Asigură-te de fiecare dată că ai clarificat notaţiile până la eliminarea oricărei confuzii

Abuzul de "o aceiaşi literă" repetată pentru diferite mărimi poate fi şi cu efecte negative. Trebuie o măsură, un echilibru. Chiar dacă ar putea fi un "conflict" cu alte stiluri, stilul ermetic sau grăbit nu este pentru acest nivel de pregătire, încă! Scrierea cu calculatorul, în "office" aduce acest stil, lax şi imprecis, foarte la îndemână.

În textele tipărite se foloseşte adesea litera îngroşată (**bold, al din**) pentru vectori, dar acest mod este în mod evident un handicap pentru scrierea cu creta pe tablă (şi la fel pentru cel care transcrie şi îşi ia notiţe). Pentru **eleganţa** demonstraţiilor sau rezolvărilor, pentru

consecvenţă şi coerenţă, este preferabil ca şi pe figuri mărimile vectoriale să fie desenate ca vectori. Astfel mărimile vectoriale vor fi mai bine ancorate în cunoştinţele elevilor.
Mărimile scalare le operezi cu regulile de calcul algebric. Cu vectorii lucrurile sunt un pic mai complicate. Îţi reamintesc că – de exemplu – pentru vectori ai trei tipuri de înmulţiri.

- Înmulţirea cu un scalar – operaţie în care rezultatul multiplicării vectorului $\vec{v}$ (care are modulul v)cu scalarul λ produce un vector cu aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul multiplicat dar cu modulul multiplicat.

$$\left|\vec{v}\cdot\lambda\right| = v\cdot\lambda \qquad (\,1.1)$$

- Înmulţirea scalară a doi vectori – operaţie care la aplicarea între vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ ale căror direcţii fac unghiul θ produce un scalar a cărui valoare este

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = v_1\cdot v_2\cdot\cos\theta \qquad (\,1.2)$$

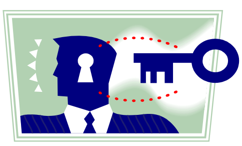
- Înmulţirea vectorială a doi vectori - operaţie care la aplicarea între vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ având acelaşi punct de aplicaţie, ale căror direcţii fac unghiul θ, produce un vector perpendicular pe planul vectorilor înmulţiţi, cu sensul dat de regula burghiului drept şi cu modulul

$$\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right| = v_1\cdot v_2\cdot\sin\theta \qquad (\,1.3)$$

Regula burghiului drept
Roteşte primul vector din produs către al doilea vector din produs pe drumul cel mai scurt. ***Sensul de deplasare*** *al unui burghiu obişnuit (sau şurub obişnuit) rotit în acelaşi sens este* ***sensul vectorului produs vectorial***

Produsul vectorial, acolo unde se poate aplica este un mod de tratare foarte util, foarte "puternic". Pentru că oferă în formule răspunsul referitor nu numai la mărimea cerută dar şi la direcţie şi sens. Dacă "locul" o permite acest mod de învăţare poate fi util şi mai departe. Produsul vectorial a fost definit de matematicieni pentru aşezarea "coadă-coadă" a vectorilor. Pentru fizician este ceva mai comod deoarece sensul de rotaţie pe care l-ar provoca forţa din momentul forţei (prin momentul forţei) coincide chiar cu sensul produsului vectorial. Sub acest aspect şi profitând de această "facilitate" produsul vectorial poate fi mai uşor asimilat.

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{b}\times\vec{F} \qquad (\,1.49$$



Totuşi, măcar la un moment dat, **definiţia adevărată** – integrală – trebuie enunţată. Este cazul cu orice noţiune pe care o introducem şi o folosim în formă prescurtată.

Elevul nu trebuie să rămână pentru mai târziu cu un izvor de confuzii. Şi nici să creadă că a fost înşelat de cel care l-a instruit. Cu riscul să nu înţeleagă imediat el trebuie să "audă" adevărata exprimare, desigur la nivelul său sau cât mai pe limba lui.

Ia ca pildă momentul forţei – cauza rotirii volanului de automobil. Pentru această situaţie produsul vectorial se defineşte ca acel vector de **modul** $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$

de **direcţie** perpendiculară pe planul definit de vectorii $\vec{r}$ (vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţe) şi forţa $\vec{F}$ (două drepte definesc un plan) şi de **sens** dat de sensul de înaintare al şurubului (sau burghiului) drept dacă rotim primul vector peste al doilea, pe drumul cel mai scurt. Drumul cel mai scurt se referă la unghiul mai mic de 180 grade dintre vectori. Urmăreşte ilustrarea produsului vectorial din figura de mai jos

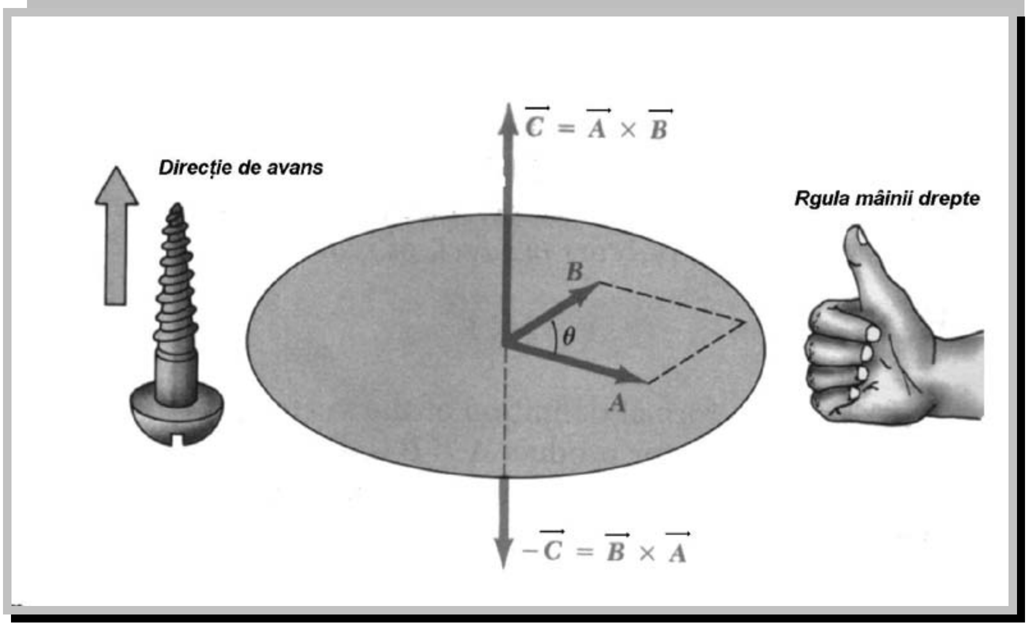


Figura 1.1

> *Produsul vectorial este **anticomutativ***

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (1.5)$$

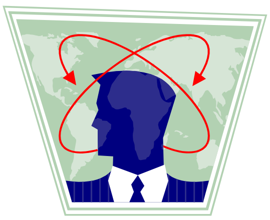
Primul peste al doilea, se referă la ordinea în care sunt scrişi în formula vectorială. **Primul peste al doilea** arată că altfel s-ar schimba sensul vectorului produsul vectorial. Produsul vectorial este anticomutativ şi deci este important să păstrăm şi în exprimarea orală ordinea factorilor: momentul forţei este produsul (vectorial) dintre **braţ şi forţă.**

Burghiu dr ept *sau şurub drept se înşurubează la rotirea spre dreapta. Este şurubul normal. Există şi* **burghiu stâng** *sau şurub stâng care avansează la rotirea spre stânga. Caută un pix sau un stilou şi înşurubează-i capacul . Obiectul tău este aproape sigur un şurub* ***drept***

Burghiul stâng este mai rar, dar se întâlneşte în trusele pentru extragerea şuruburilor rupte. Şurubul stâng este ceva mai răspândit, şi poate fi exemplificat la întinzătoarele de la plasa de volei sau de tenis dar şi ca piesă utilă în gospodărie. Dar cel mai sigur mod de exersare a rotaţiei în sensul "drept" este permis de tirbuşon. Tirbuşonul stâng nu există decât doar ca şotie.
În zilele noastre robinetul care era sursa principală de rotaţii drepte a cam dispărut, dar a apărut butelia de apă minerală care poate fi iar o sursă de a exersa rotaţia dreaptă. O definiţie lungă dar cu anumită morală a ei. Permite implementarea unui mod riguros de exprimare sau cel puţin mai atent.
Uite, că mai pot fi şi capcane!

1.3. *Sistem de referinţă*

Cinematica studiază mişcarea în spaţiu şi timp, abstracţie făcând de cauzele mişcării. Deplasarea unui corp are loc în raport cu alte corpuri. Fără aceste alte corpuri nu se poate vorbi de deplasare, care este întotdeauna relativă. Nu se poate vorbi de poziţie într-un spaţiu absolut, independent de corpurile aflate în el, ci numai de poziţie faţă de alte corpuri. Corpul, care se consideră prin convenţie fix şi faţă de care se studiază deplasarea altor corpuri, se numeşte corp de referinţă, de exemplu, Pământul sau Soarele.
În figura 1.2 poţi observa mişcarea Pământului într-un sistem de referinţă legat de Soare.



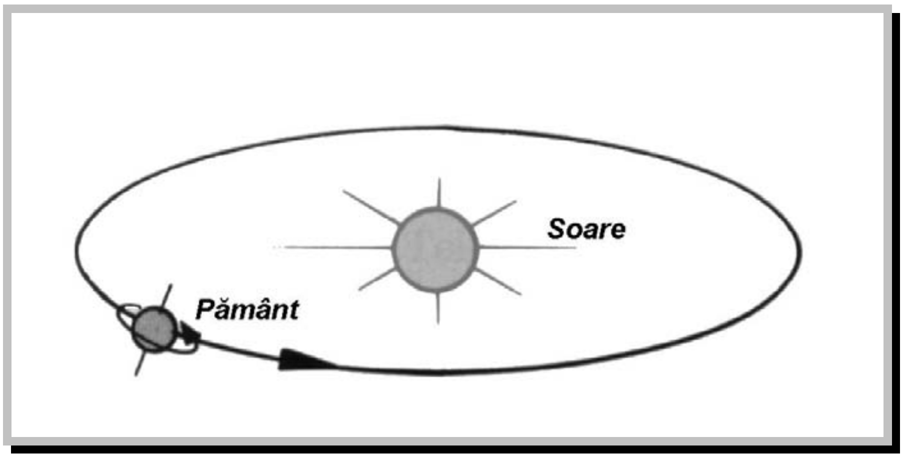


Figura 1.2

De corpul de referinţă este legat rigid un sistem de coordonate, de exemplu, un sistem cartezian (ortogonal) de trei axe.
Punctul *P* din camera figurată în imaginea 1.3 are poziţia determinată de cele trei coordonate carteziene ale sale.

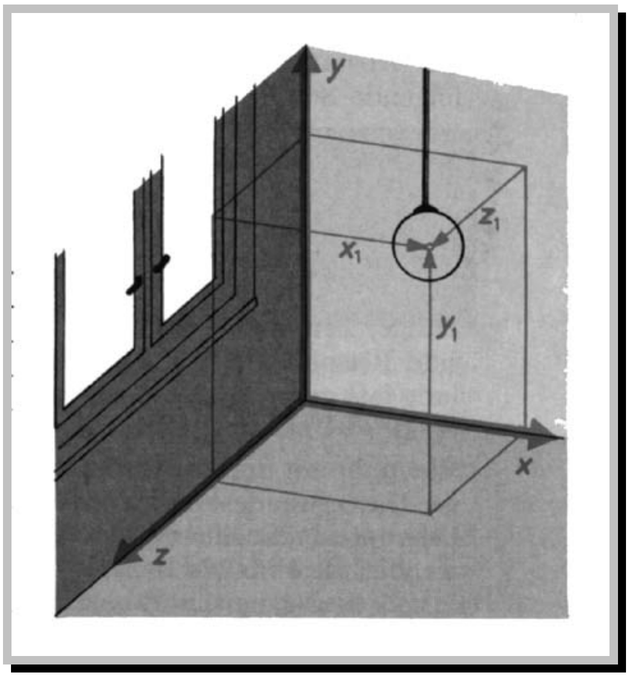


Figura 1.3

Bornele unei şosele reprezintă un sistem de referinţă cu o singură dimensiune. legat de Pământ .
Reţine că am imaginat un sistem în care putem analiza mişcarea Pământului dar că pentru mişcarea automobilelor am considerat un sistem de referinţă pentru care Pământul este referenţialul fix.

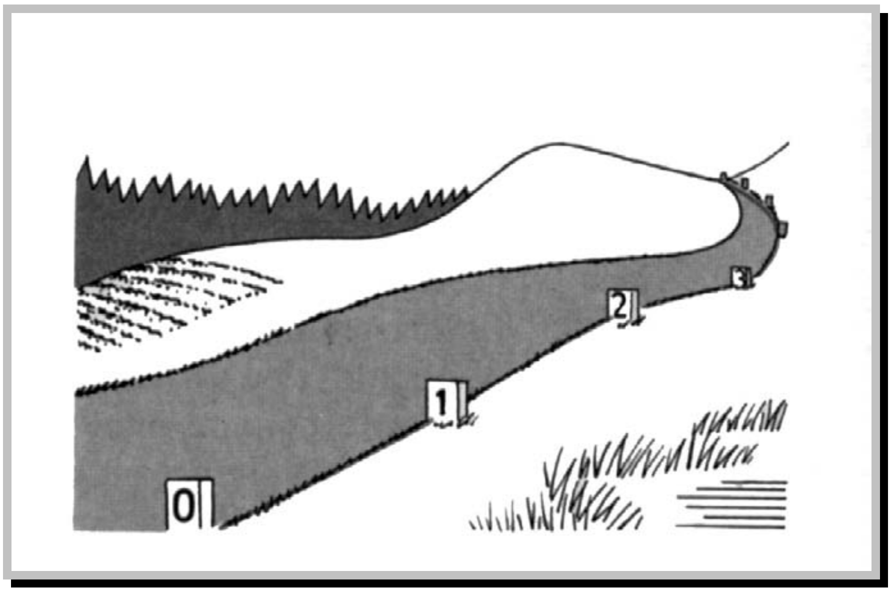


Figura 1.4

Sistemul de coordonate pentru măsurarea poziţiei şi ceasornicul pentru măsurarea timpului constituie un sistem de referinţă sau reper.

Referenţial = ***Sistem de coordonate*** pentru determinarea poziţiei + ***ceasornic*** pentru măsurarea timpului

Mişcarea unei corp arată diferit în sisteme de referinţă diferite, de exemplu în sistemul de coordonate propriu, adică în sistemul de coordonate legat rigid de corp, acesta este în repaus. Practic, se alege întotdeauna un sistem de referinţă astfel încât fenomenul studiat să arate cât mai simplu.
Din punct de vedere al dinamicii, se evidenţiază o clasă foarte importantă de sisteme de referinţă, numite inerţiale.

O primă simplificare în studiul mişcării corpurilor materiale este neglijarea deformării corpului, adică considerarea corpului rigid (distanţele mutuale dintre părţile corpului sunt presupuse fixe). A doua simplificare este neglijarea dimensiunilor şi rotaţiilor proprii. Acesta este punctul material, caracterizat numai prin masa sa.
În cinematică, masa nu interesează, de aceea punctul material devine mobil, adică un punct geometric în mişcare. Un corp oarecare poate fi considerat ca un sistem de puncte materiale.
În mişcarea de translaţie, toate punctele corpului se mişcă identic, ca pe nişte linii paralele între ele, de aceea mişcarea unui singur punct al corpului caracterizează pe deplin mişcarea întregului corp, indiferent de dimensiunile acestuia, deci poţi aplica modelul punctului material.

1.4. *Ecuaţia de mişcare*

Se numeşte traiectorie linia sau curba descrisă de mobil în timpul mişcării sale, adică locul geometric al punctelor prin care trece mobilul. Poziţia mobilului la un moment dat *t* este determinată de coordonatele sale, de exemplu *x, y, z* într-un sistem de coordonate ortogonal sau altfel, de vectorul de poziţie $\vec{r}$, ale cărui proiecţii (componente) pe axele Oxyz sunt tocmai coordonatele *x, y, z:*

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \qquad (1.6)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (1.7)$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii axelor - vectori cu direcţia şi sensul axelor şi de modul unitar

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1. \qquad (1.8)$$

Conform principiului perfectei localizări, se presupune că punctul material descrie o traiectorie continuă bine determinată, că în fiecare moment ocupă pe traiectorie o poziţie bine determinată şi că aceasta variază continuu în timp. Aceasta înseamnă că coordonatele punctului material *x, y, z* sunt funcţii finite, uniforme şi continue de timp:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} = \vec{r}(t). \qquad (1.9)$$

Ecuaţia de mai sus se numeşte ecuaţia cinematică a mişcării şi reprezintă ecuaţia parametrică a traiectoriei, în care parametrul este timpul. Mişcarea poate fi descrisă de asemenea de relaţia: s=f(t), unde s este coordonata curbilinie a mobilului, adică lungimea arcului de traiectorie.

1.5. *Viteza*

Viteza medie pe o porţiune de traiectorie de lungime Δs, parcursă în intervalul de timp Δt, se defineşte prin raportul:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (1.10)$$

Viteza instantanee sau momentană la momentul t se obţine trecând la limită:

$$v \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\,, \qquad (1.11)$$

adică se obţine prin derivarea coordonatei curbilinii *s* în raport cu timpul. Dacă pe o traiectorie oarecare se parcurg distanţe egale în intervale de timp egale, mişcarea se numeşte uniformă pe traiectorie sau curbilinie uniformă. În figura 1.5 este prezentată mişcarea uniformă a unei maşini pe un drum cu dealuri şi văi

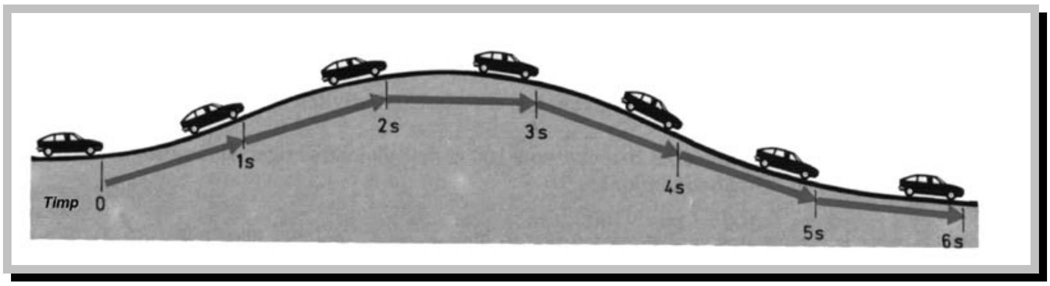
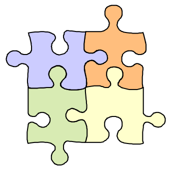


Figura 1.5



În figura 1.6 este prezentată o mişcare uniformă pe o traiectorie rectilinie

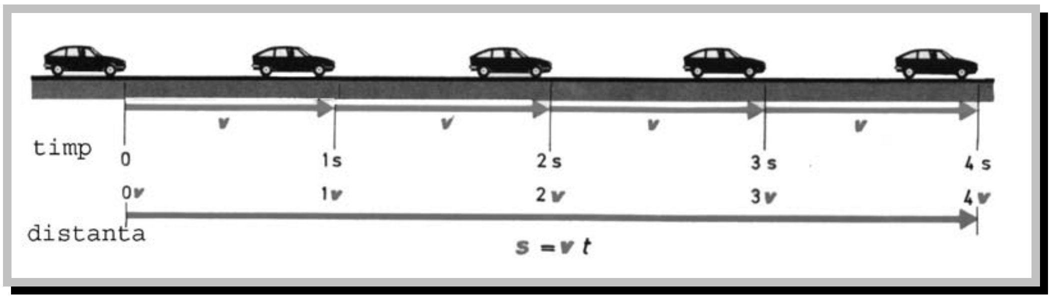


Figura 1.6

În cazul mişcării uniforme :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = const = v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int ds = \int v dt \Rightarrow s(t) = s_0 + v(t - t_0), \qquad (1.12)$$

unde s_0 este coordonata la momentul iniţial t_0.
Acest : *($t + t_0$)* reprezintă durata efectivă a respectivei mişcări şi de cele mai multe ori putem nota cu *t.*

Fixarea convenabilă a poziţiei unui punct material este legată de o alegere bună a coordonatelor. Sistemele de coordonate nu sunt neapărat carteziene, cu trei axe reciproc perpendiculare. Figurile 1.7 şi 1.8 prezintă posibilitatea fixării poziţiei aceluiaşi punct prin coordonatele sale carteziene (proiecţiile (x, y, z) ale poziţiei sale pe cele trei axe

reciproc perpendiculare) care au versorii $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ dar şi în coordonate cilindrice (r,θ,z) în sistemul cu versorii $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{k})$

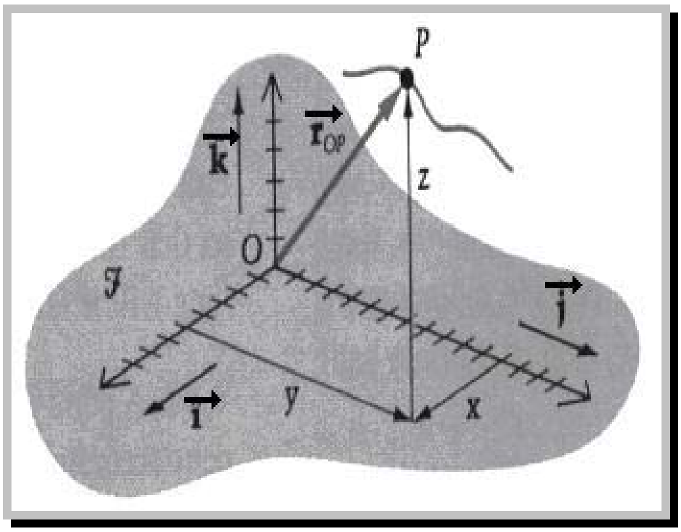


Figura 1.7

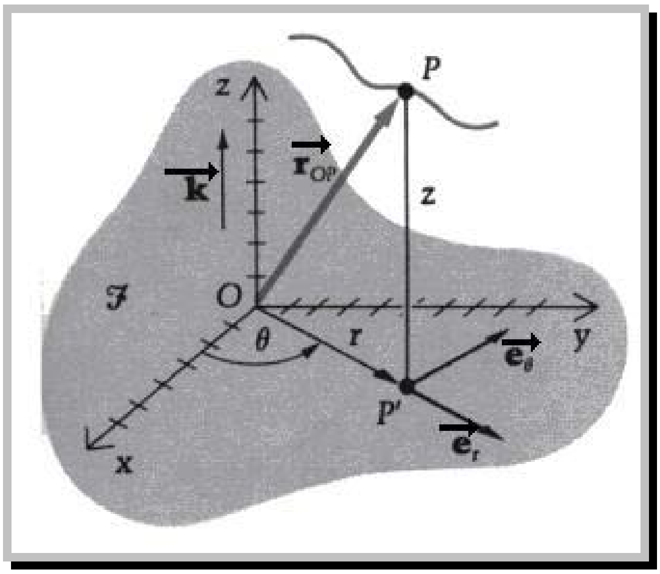


Figura 1.8

Direcţiile axelor de coordonate alese, permit şi urmărirea altor caracteristici ale mişcării unui punct material. În figura de mai jos este prezentată traiectoria unei pietre pe care o arunci oblic. În imagine sunt prezentate de asemenea

- Viteza pietrei (şi pe componente) la diferite momente ale mişcării
- Acceleraţia gravitaţională imprimată de Pământ pietrei în timpul mişcării

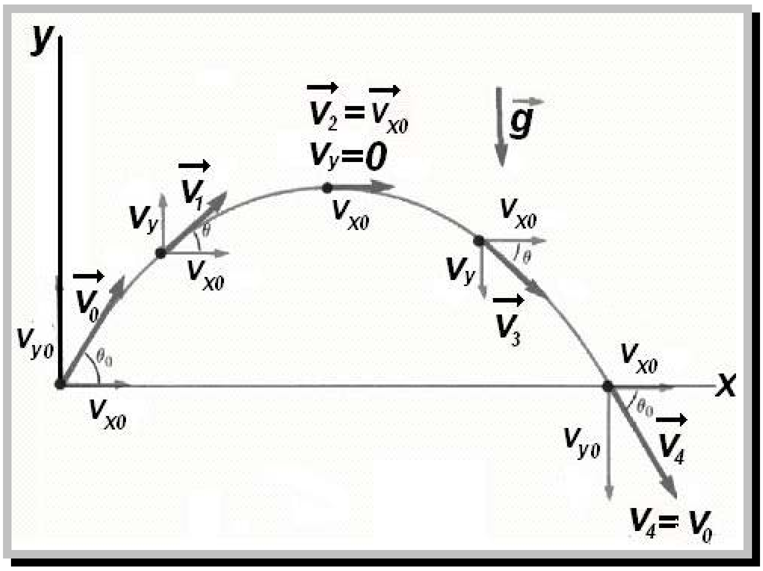
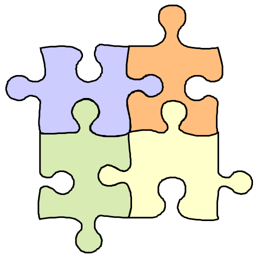


Figura 1.9



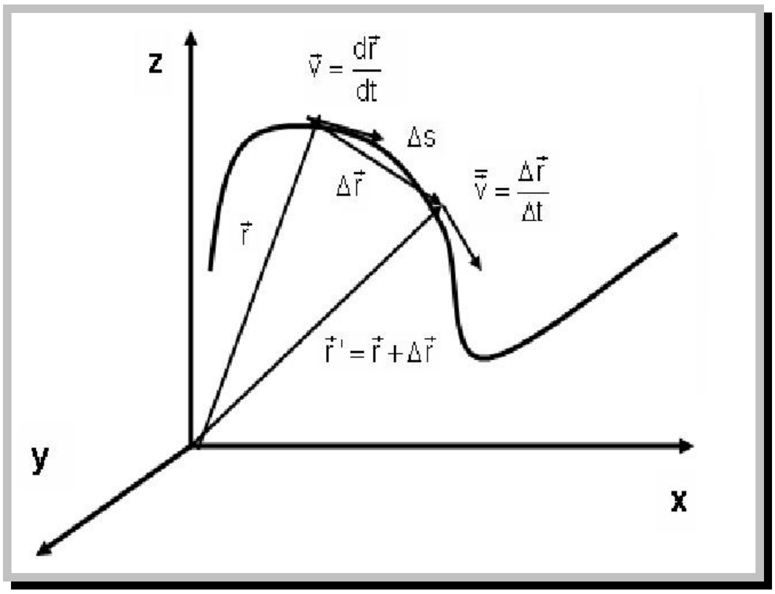


Figura 1.10

În figura 1.10 este prezentat modul în care - grafic – sunt corelate poziţia, distanţa parcursă şi viteza unui mobil aflat într-o mişcare oarecare.

Vectorul deplasare este prin definiţie

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}\,. \qquad (1.13)$$

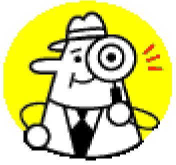
Vectorul viteză medie $\bar{\vec{v}}$ se defineşte prin raportul:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.14)$$

şi are direcţia vectorului deplasare. La limită, obţii vectorul viteză instantanee sau momentană:

$$\vec{v} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\,. \qquad (1.15)$$

Vectorul viteză este derivata vectorului de poziţie în raport cu timpul.



Vectorul viteză momentană are direcţia tangentei la traiectorie (este tangent la traiectorie).

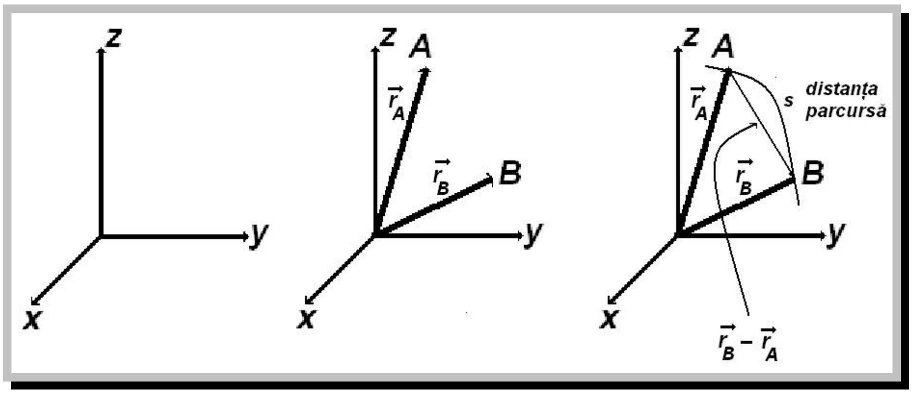


Figura 1.11

În desenul de mai sus ţi se sugerează o kinogramă a paşilor pe care îi faci când studiezi o mişcare

- *Alegi sistemul de referinţă pe care îl socoteşti potrivit*
- *Reprezinţi vectorul de poziţie al poziţiei de plecare şi cel al poziţiei de sosire.*
- *Analizezi în ce măsură modulul diferenţei vectorilor de poziţie coincide cu distanţa parcursă*
- *Defineşti vitezele utile*

Pentru mingea care „ţopăie„ în figura 1.12, deplasarea pe orizontală este complet diferită de distanţa parcursă.

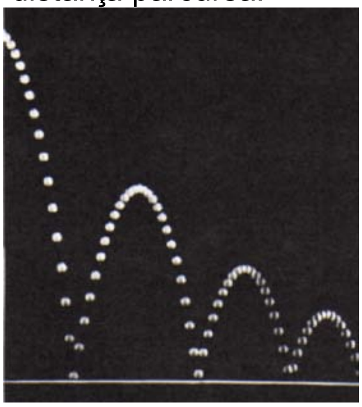


Figura 1.12

Pentru bila care cade pe verticală reprezentată în figura 1.13 vitezele determinate la momente diferite diferă între ele. Cu cât distanţa parcursă este mai mare cu atât viteza are modulul mai mare.

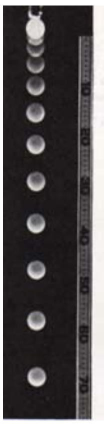
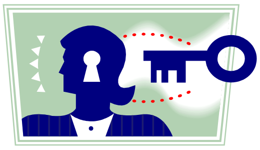


Figura 1.13



La limită lungimea arcului de curbă *ds* coincide cu lungimea coardei subîntinse $\left|d\vec{r}\right|$, De exemplu la cerc de raza R:

$$\frac{\left|d\vec{r}\right|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{2R\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{R\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = 1, \qquad (1.16)$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul la centru (în radiani) al coardei de lungime $2R\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ care subîntinde arcul de lungime $R\Delta\theta$,. Din acest motiv rezultă că derivata $\frac{d\vec{r}}{ds}$, având modulul 1, trebuie să fie un versor notat $\vec{t}$, şi anume versorul direcţiei tangente la curbă în sensul creşterii coordonatei s:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \vec{t}\,. \qquad (1.17)$$

Prin urmare:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\vec{t}\,, \qquad (1.18)$$

vectorul viteză este tangent la traiectorie şi îndreptat în sensul mişcării. Viteza pe traiectorie $\dot{s}$ este componenta vectorului viteză $\vec{v}$ pe direcţia tangentei $\vec{\mathrm{t}}$:

$$\vec{v} = v\vec{t}, \text{unde } \mathrm{v} = \dot{\mathrm{s}} = \pm\left|\vec{\mathrm{v}}\right|. \qquad (1.19)$$

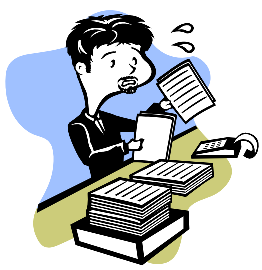
1.6. *Problemă rezolvată*

În mişcarea rectilinie direcţia vectorului viteză este fixă. Fie mişcarea rectilinie uniformă, $\vec{v} = const$. Atunci:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}dt \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0). \qquad (1.20)$$

Aceasta este forma vectorială a legii de mişcare rectilinie uniformă. Pe componente, proiectând ecuaţia vectorială pe axe într-un sistem de coordonate cartezian, avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t - t_0), \\ y = y_0 + v_y(t - t_0), \\ z = z_0 + v_z(t - t_0) \end{cases} \qquad (1.21)$$



care reprezintă ecuaţiile cinematice ale mişcării uniforme şi în acelaşi timp ecuaţiile parametrice ale traiectoriei, o linie dreaptă în spaţiu, sau în plan, după caz.

1.7. *Test de autoevaluare 1.1*

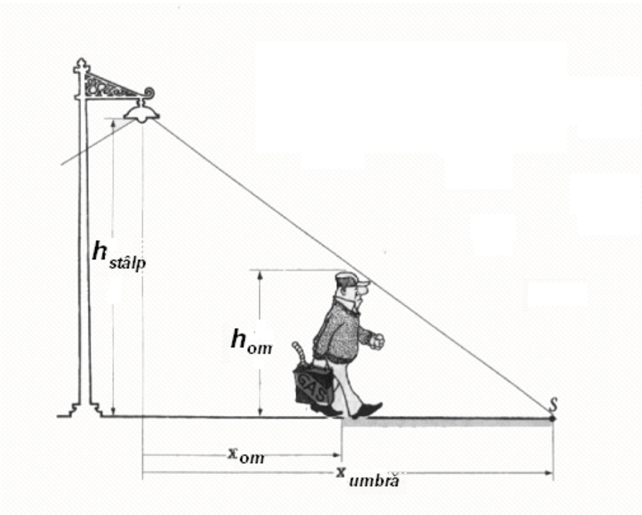
Răspunde la următoarele întrebări:

1. Ce este punctul material?

2. Cum defineşti traiectoria?

3. Defineşte viteza medie şi viteza momentană.

4. Care este unitatea de măsură a vitezei în SI? Ce unităţi derivate mai cunoşti?



5.
Pietonul din figură se deplasează rectiliniu uniform . Umbra capului lui se deplasează rectiliniu uniform? Are umbra lungime constantă?

Răspunsurile le găseşti la pagina 15

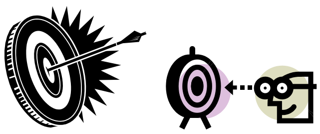
1.8. *Lucrare practică*

Această lucrare o poţi realiza la tine acasă, pe câmp, pe şosea sau într-un laborator. Scopul ei este să determini viteza medie a unui mobil (un vehicul, o bicicletă, un tractor, un autobuz etc., un melc!!!).

Prin definiţie viteza medie este spaţiul total parcurs, aşa cum este el făcut, din bucăţele, împărţit la durata totală a parcursului (la timpul total).

A. Dacă eşti într-un vehicul, un mod eficient ar fi să te raportezi la nişte distanţe cunoscute, - cele dintre bornele kilometrice.
B. Atunci viteza medie va fi distanţa parcursă împărţită la timpul dintre două borne, consecutive sau nu.
C. În cazul când observi mişcarea din afară, - mişcarea melcului de pildă, poţi alege noi repere. Două linii, doi copaci, Este esenţial să poţi măsura distanţa dintre repere.
D. Cronometrul poate fi un ceas, un telefon mobil sau chiar un cronometru.
E. O recomandare ar fi să calculezi viteza atât în metri pe secundă cât şi în kilometri pe oră.
F. Care crezi că ar fi cea mai potrivită unitate în cazul melcului?
G. Care ar fi modul de a apropia viteza medie de cea instantanee?

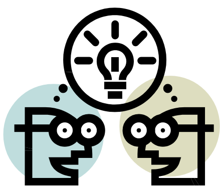
1.9. *Răspunsuri la testul de autoevaluare 1.1*



1. Punctul material este un model utilizat în fizică, atunci când putem neglija dimensiunile unui corp. Punctul material este un punct (deci fără dimensiuni) care conţine întreaga masă a corpului

2. Se numeşte traiectorie linia sau curba descrisă de mobil în timpul mişcării sale

3. Viteza medie pe o porţiune de traiectorie de lungime Δs, parcursă în intervalul de timp Δt, se defineşte prin raportul: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Viteza instantanee sau momentană la momentul t se obţine prin derivarea coordonatei curbilinii s în raport cu timpul: $v \overset{def}{=} \frac{ds}{dt} = \dot{s}$.



Continuare

4. Unitatea de măsură în SI a vitezei este ms^{-1}. O unitate de măsură uzuală este kmh^{-1}. prin derivarea coordonatei curbilinii s în raport cu timpul. Transformarea dintr-o unitate în cealaltă se face:

$$1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}=1\frac{1000\mathrm{m}}{3600\mathrm{s}}=\frac{1}{3,6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}=1\frac{1000\mathrm{m}}{3600\mathrm{s}}=\frac{1}{3,6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

5. Da. Viteza sa este $\dfrac{h_{stâlp}}{h_{stâlp}-h_{om}}v_{om}$

   Nu. Lungimea umbrei creşte uniform după regula

   $$l=\frac{h_{om}}{h_{stâlp}-h_{om}}v_{om}\cdot t$$

1.10. *Lucrare de verificare 1*

Rezolvă cerinţele de mai jos şi trimite tutorelui rezultatele pe care le consideri corecte.

1. Pornind de la acceleraţia constantă, găseşte :

Legea de mişcare x = x(t); *(1 punct)*

Legea vitezei v = v(t) ; *(1 punct)*

Prin particularizare legea pentru mişcarea uniformă. *(1 punct)*

2. Un mobil, pornind fără viteză iniţială, parcurge in prima secundă 1m, in a doua secundă 2m, … , în a n-a secundă parcurge n metri. Este această mişcare uniform accelerată? *(3 puncte)*

3. Efectuează lucrarea practică. Redactează – folosind un program de editare de texte – un protocol al lucrării tale în care prezintă rezultatele măsurătorilor şi calculele asociate . *(3 puncte)*

Notă: Se va acorda un punct din oficiu

Total 10 puncte

1.11. *Termeni şi expresii cheie. Formule cheie*

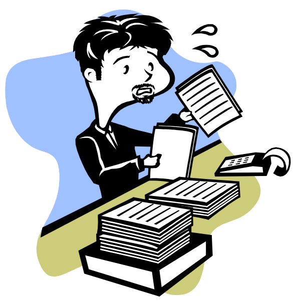
Termeni şi expresii cheie

- **Mărimi scalare;mărimi vectoriale;**
- **Sistem de referinţă;**
- **Solid rigid;punct material;**
- **Traiectorie;**
- **Ecuaţie de mişcare;**
- **Viteză medie; viteză momentană;**

Formule cheie

- **Produsul scalar a doi vectori** $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\theta$;
- **Produsul vectorial a doi vectori** $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

  $\left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right| = v_1 \cdot v_2 \cdot \sin\theta$;
- **Vectorul deplasare** $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$;
- **Vectorul viteză medie** $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$;
- **Vectorul viteză momentană** $\vec{v} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$;



1.12. *Bibliografie*

1.A. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a), pag. 9-15

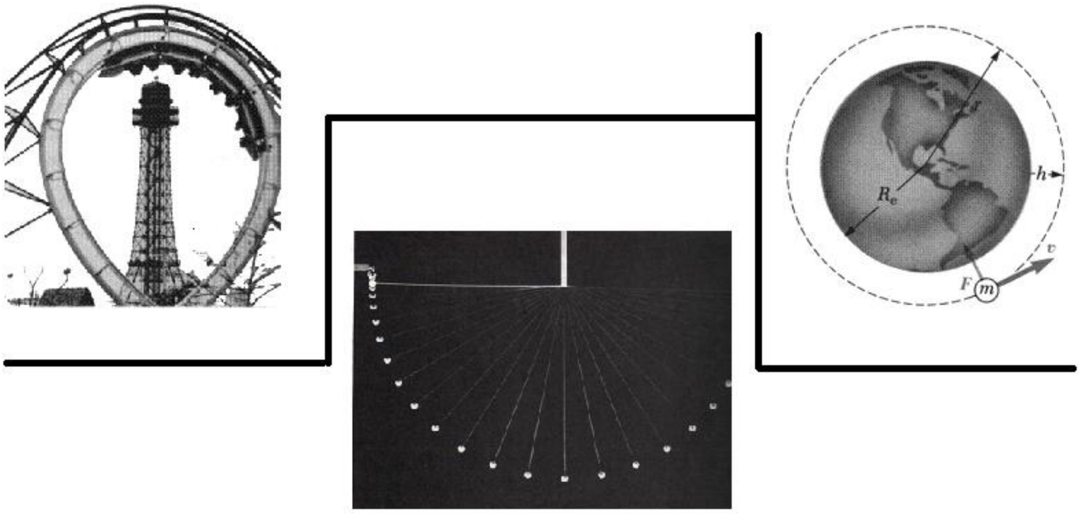
2. A. P. Hristev, V. Fălie, D. Manda, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984, pag. 5-9

3. ***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983, pag. 3-4, 9-13

Unitatea de învăţare 2

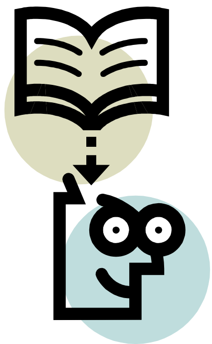
MIŞCAREA CURBILINIE

Cuprins **Pagina**



Trenuleţul din montagne russe, bila atârnată de un fir sau un satelit care se roteşte în jurul Pământului se află în cursul mişcărilor pe traiectorii circulare sau care pot fi asimilate unor cercuri. Gândeşte-te la vitezele pe care le au obiectele desenate . Gândeşte-te la aceste viteze ca la vectori – adică descrieţi-le cu modul, direcţie şi sens

2.1. *Obiectivele unităţii de învăţare 2*



Când vei termina de studiat acest capitol vei fi capabil :

- *să caracterizezi o mişcare circulară folosind un limbaj fizic adecvat;*
- *să determini perioada de rotaţie, frecvenţa şi viteza unghiulară în mişcarea circulară uniformă;*
- *să cunoşti expresia matematică a acceleraţiei centripete;*
- *să descrii mişcarea circulară neuniformă;*
- *să deduci caracteristicile mişcărilor în câmp gravitaţional uniform, pe traiectorii parabolice, datorate aruncării corpurilor;*
- *să descrii diverse mişcări reale pe traiectorii curbilinii.*

Viteza este tangentă la traiectorie . Pentru mişcarea pe traiectorii liniare, o eventuală variaţie a vitezei nu se poate referi decât la modulul acesteia. Dacă mişcarea unui mobil se face pe o traiectorie curbilinie , viteza variază chiar dacă – de exemplu – modulul său rămâne constant. Mărimea care descrie variaţia vitezei, **acceleraţia**, devine esenţială pentru descrierea mişcării.

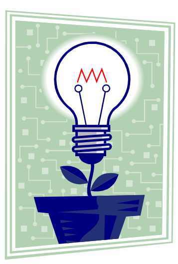
2.2. *Acceleraţia*

Măsura variaţiei, **atât ca mărime cât şi ca direcţie**, a vectorului viteză este vectorul acceleraţie. Analog vectorului viteză, se defineşte acceleraţia medie şi instantanee (momentană), astfel:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \qquad (2.1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (2.2)$$

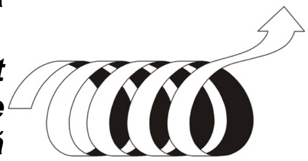
sau



$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (2.3)$$

adică acceleraţia este derivata de ordinul întâi a vitezei sau derivata de ordinul doi a vectorului de poziţie în raport cu timpul *t.* În timp ce viteza este întotdeauna tangentă la traiectorie şi are sensul mişcării, acceleraţia în mişcarea curbilinie este întotdeauna orientată spre

"interiorul" traiectoriei, adică spre partea concavă a traiectoriei, partea spre care se roteşte vectorul viteză.



Numai în mişcarea circulară uniformă, acceleraţia este strict perpendiculară pe traiectorie – şi spre interior, desigur; numele său pentru această situaţie – acceleraţie centripetă – înseamnă „orientată către centrul traiectoriei”.

Dacă viteza pe traiectorie v variază cu cantităţi egale în intervale de timp egale, mişcarea se numeşte uniform variată pe traiectorie sau curbilinie uniform variată şi acceleraţia $a_{\text{tangeţială}}$ este constantă; se poate determina viteza, după cum urmează. Din

$$\frac{dv}{dt} = a_t = cons \tag{2.4}$$

rezultă

$$\int dv = \int a_t dt \Rightarrow v = v_0 + a_t(t - t_0) \tag{2.5}$$

şi de asemenea

$$\int ds = \int v dt \Rightarrow s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_t(t - t_0)^2 \tag{2.6}$$

Eliminând timpul *t*, între expresiile de mai sus, vei obţine formula generală a lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0), \tag{2.7}$$

Poţi găsi o relaţie utilă eliminând acceleraţia:

$$s = s_0 + \frac{v_0 + v}{2}(t - t_0) = s_0 + \bar{v}(t - t_0), \bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}. \tag{2.8}$$

Unitatea de măsură în S.I. pentru acceleraţie este egală cu acceleraţia unui mobil în mişcare uniformă variată, a cărui viteză creşte cu o unitate (*1ms*$^{-1}$) într-un interval de timp egal cu unitatea (*1s*):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{[v]}{[t]} = 1\frac{m}{s^2} \text{ in SI}. \tag{2.9}$$

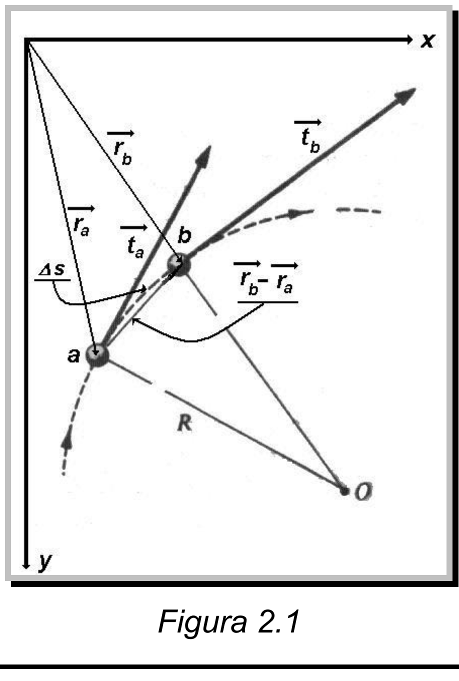
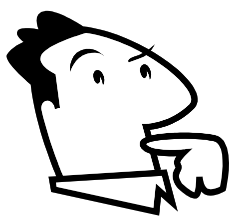


Figura 2.1



În figura 2.1 este reprezentat un mobil aflat pe traiectoria sa în două poziţii succesive , apropiate, caracterizate prin vectorii de poziţie $\vec{r}_a$ şi respectiv $\vec{r}_b$. Tangentele la traiectorie în cele două puncte sunt figurate ca vectorii $\vec{t}_a$ respectiv $\vec{t}_b$. Pentru traiectoria curbă, prin definiţie, curbura este:

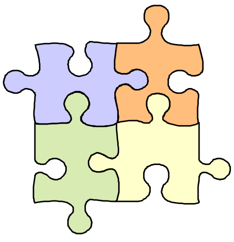
$$C \overset{def}{=} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \Rightarrow R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\theta}, [C] = \frac{rad}{m} \qquad (2.10)$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul (în radiani) dintre două tangente duse în două puncte aflate la distanţa curbilinie Δs între ele, iar R este raza de curbură. Ai putea considera că dacă punctele de pe traiectorie sunt foarte apropiate, există cu certitudine un cerc care se suprapune perfect pe traiectorie – pentru zona celor două puncte. Cercul despre care se poate spune că reprezintă local traiectoria se numeşte *cerc oscilator.* Centrul cercului oscilator este centrul local de curbură al traiectoriei. Raza acestui cerc este raza de curbură *locală* a traiectoriei. Nu confunda punctul O cu centrul sistemului de axe de coordonate. Originea sistemului este fixă. Pentru fiecare mică porţiune din traiectorie există o rază de curbură şi un centru local diferite de cele ale altor mici zone de traiectorie.

Normala la curbă (adică perpendiculara pe tangenta la curbă), se numeşte normala principală (versorul normalei $\vec{n}$ fiind îndreptat spre centrul de curbura C). Normala la curbă, perpendiculară pe planul curbei, se numeşte binormală, versorul ei se alege conform produsului vectorial:

$$\vec{b} \overset{def}{=} \vec{t} \times \vec{n} . \qquad (2.11)$$

Astfel, în fiecare punct al curbei poţi defini un triedru ortogonal $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ numit triedru principal, natural sau triedru Frenet.



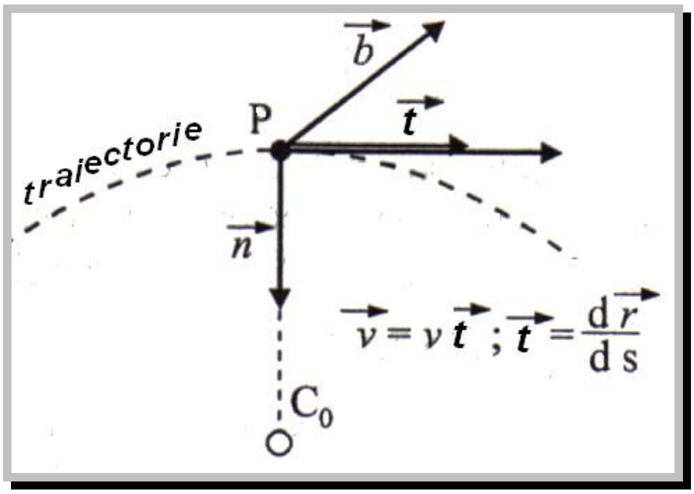


Figura 2.2

Imaginează-ţi în figură două poziţii succesive foarte apropiate ale punctului *P.* Desigur, poţi înţelege că

$$\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta\theta}\right| = \frac{2\left|\vec{t}\right|\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \to 1 \text{cand } \Delta\theta \to 0\,, \qquad (2.12)$$

prin urmare derivata $\frac{d\vec{t}}{d\theta}$, având modulul 1, este un versor. Prin urmare, în modul, direcţie şi sens:

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta\theta} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n}\,, \qquad (2.13)$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = C\vec{n} = \frac{\vec{n}}{R}\,. \qquad (2.14)$$

Relaţia este cunoscută ca prima formulă a lui Frenet.

Un vector variabil $\vec{u}$, de modul constant, de exemplu un versor, nu se poate decât roti, deci ducându-l dintr-un punct fix, vârful său descrie o curbă situată pe o sferă de rază egală cu modulul vectorului. La limită, variaţia $\Delta\vec{u}$ a vectorului de modul constant, devine d$\vec{u}$, deci perpendiculară pe vector. Poţi înţelege afirmaţia de mai sus dacă ai în vedere că triunghiul isoscel care are două laturi de lungime *u* şi o latură de lungime foarte : mică *du* are - practic – unghiul din vârf extrem de mic şi , implicit la bază , unghiuri (ambele) drepte - ca în figura 2.3..

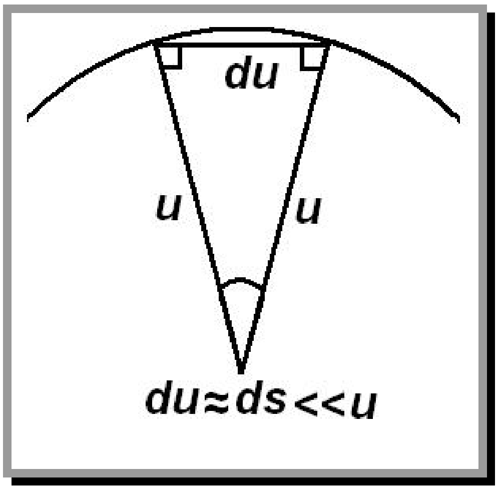


Figura 2.3

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = const \to \vec{u}d\vec{u} = 0, \text{deci } d\vec{u} \perp \vec{u}\,. \qquad (2.15)$$

Analog demonstraţiei date pentru versorul $\vec{t}$ rezultă că diferenţiala oricărui versor este egală în modul cu unghiul de rotaţie a versorului ($\left|d\vec{t}\right| = d\theta$), iar ca direcţie este perpendiculară pe versor, adică derivata unui versor în raport cu unghiul de rotaţie este un versor perpendicula pe versorul iniţial

$$\left(\frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n} \perp \vec{t}\right). \qquad (2.16)$$

Derivând, avem:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{t} + v\dot{\vec{t}} = \dot{v}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{ds}\dot{s} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad (2.17)$$

Vectorul astfel definit este acceleraţia instantanee care are componentele figurate în imaginea de mai jos

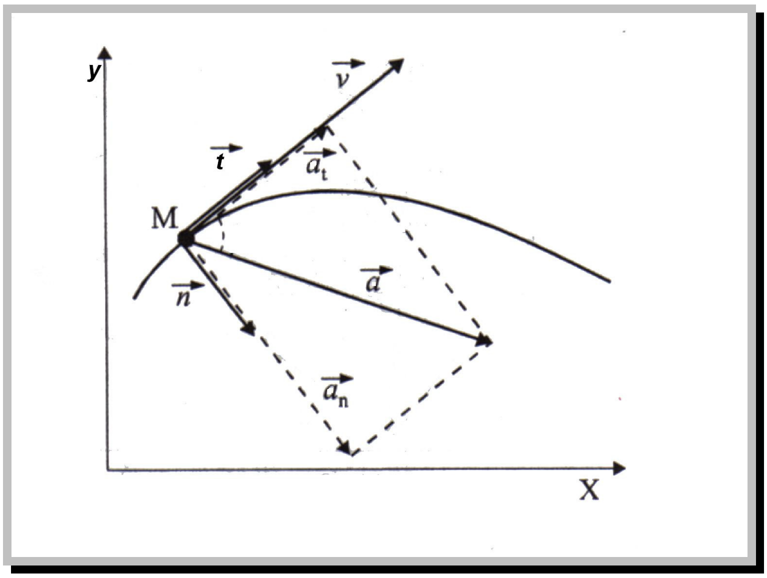


Figura 2.4

$$\begin{cases} a_t = \dot{v} = \ddot{s}, \\ a_n = \dfrac{v^2}{R}, a_b \equiv 0 \end{cases} \qquad (2.18)$$

Prin urmare, în fiecare moment vectorul acceleraţie se află în planul traiectoriei şi se descompune într-o componentă tangenţială, adică paralelă cu vectorul viteză, şi o componentă normală la traiectorie, îndreptată spre centrul de curbură, numită şi acceleraţie centripetă. Componenta a_t se datorează variaţiei modulului vitezei, iar componenta a_n se datorează variaţiei direcţiei vitezei. O mişcare curbilinie este întotdeauna accelerată din cauza variaţiei direcţiei vitezei.

*Raza care apare în formule este raza locală de curbură a traiectoriei. Traiectoria **nu** este neapărat circulară*

2.3. *Problemă rezolvată*

Încearcă să descrii mişcarea uniform încetinită a unui mobil care se deplasează pe o traiectorie rectilinie, utilizând cunoştinţele dobândite în studiul mişcării curbilinii.

Ţi se propune o analiză a mişcării rectilinii uniform variate ca un caz particular de mişcare curbilinie.
În mişcarea uniform variată rectilinie traiectoria este un cerc cu rază infinită ,$R \to \infty$ şi deci, $a_{normala}=0$, astfel încât $a_{tangenţiala}$ coincide cu $a_{totală}$.
În cazul $a_{tangentiala}<0$ şi $v_0>0$, mişcarea este uniform încetinită pe traiectorie, existând un moment t_{maxim} şi o distanţă maximă parcursă s_{maxim} la care corpul se opreşte (v=0):

$$v = v_0 + a_t t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_m = -\dfrac{v_0}{a_t} = \left|\dfrac{v_0}{a_t}\right| \\ s_m = s_0 - \dfrac{v_0^2}{2a_t} = s_0 + \dfrac{v_0^2}{2|a_t|} \end{cases} . \qquad (2.19)$$

2.4. *Mişcarea circulară*

Dacă mişcarea studiată se desfăşoară astfel încât traiectoria este un cerc, mişcarea este numită circulară.

2.4.1. Mişcarea circulară uniformă

Dacă viteza mobilului aflat în mişcare circulară este constantă în modul, vei numi tipul de mişcare corespunzător *mişcare circulară uniformă.*

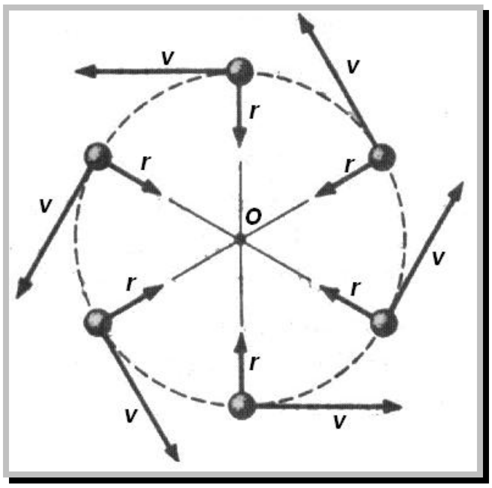
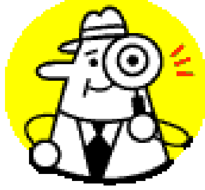


Figura 2.5



Deliberat, în figura 2.4 sunt marcate numai modulele vectorilor de poziţie şi ai vitezelor pentru mobilul aflat în mişcare circulară uniformă.

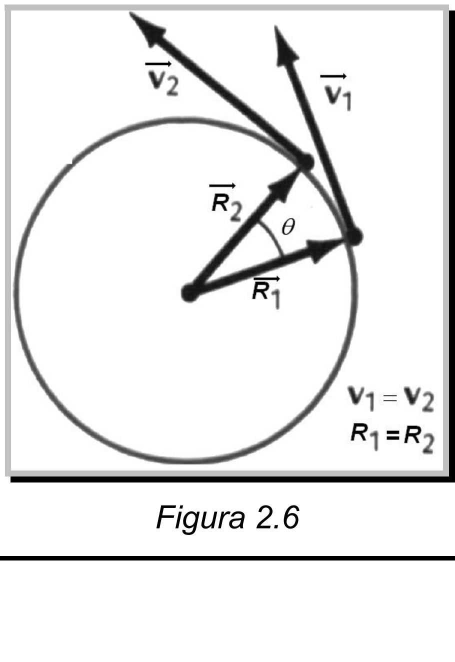


Figura 2.6

Viteza pe traiectorie sau viteza liniară este (R=const, este raza traiectoriei iar θ este măsurat în radiani):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}R = \omega R, \qquad (2.20)$$

unde

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.21)$$

este viteza unghiulară instantanee sau momentană.

2.4.2. Mişcarea circulară neuniformă

Pentru cazul în care viteza mobilului aflat în mişcare pe o traiectorie circulară nu are modulul constant, **acceleraţia tangenţială** este:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \varepsilon R, \qquad (2.22)$$

unde

$$\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.23)$$

este **acceleraţia unghiulară** instantanee în mişcarea circulară neuniformă.
Acceleraţia normală sau **centripetă** este:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R \qquad (2.24)$$

şi , corespunzător, **acceleraţia totală**:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ . \qquad (2.25)$$

Viteza şi acceleraţia pot fi scrise vectorial dacă introducem vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ situat pe axa cercului – perpendicular pe planul cercului – în sensul dat de regula burghiului, drept, aţa cum am mai comentat. Atunci, vectorul acceleraţie unghiulară $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ va fi situat pe aceeaşi axă, $\vec{\varepsilon} // \vec{\omega}$
prin urmare

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad (2.26)$$

şi

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} \\ \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{R} = -\dfrac{v^2}{R^2}\vec{R} \end{cases}. \qquad (2.27)$$

În cazul mişcării circulare uniforme mobilul parcurge arce egale în intervale de timp egale, Figura 2.7. reia ideile ilustrate de figura 2.4 aplicându-le cazului mişcării pe traiectorie circulară.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v = const\,. \qquad (2.28)$$

Atunci

$$\omega = \frac{v}{R} = const\,, \qquad (2.29)$$

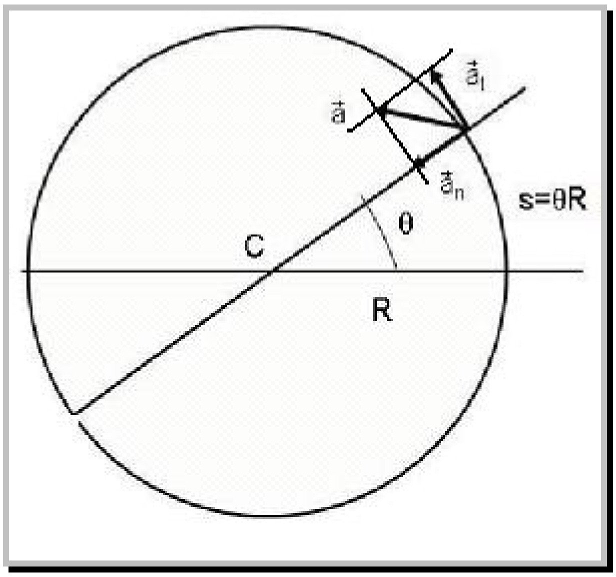
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0\,, \qquad (2.30)$$

$$a_t = \varepsilon R = 0\,, \qquad (2.31)$$

dar

$$a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0: \qquad (2.32)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \theta = \int \omega dt = \theta_0 + \omega(t - t_0)\,. \qquad (2.33)$$



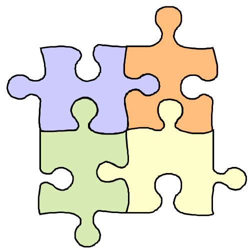


Figura 2.7

Unitatea de măsură a vitezei unghiulare este egală cu viteza unghiulară a unui mobil care într-o mişcare circulară uniformă descrie un unghi la centru de *1rad* într-o secundă:

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = s^{-1} \text{ in SI}\,. \qquad (2.34)$$

Frecvenţa *ν sau* ***turaţia*** *n se exprimă cu ajutorul lui ω prin:*

$$\nu = n = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu\,, \qquad (2.35)$$

$$[\nu] = 1s^{-1} \equiv 1Hz\,. \qquad (2.36)$$

Perioada (timpul unei rotaţii complete) este:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}, [T] = 1s\,. \qquad (2.37)$$

În mişcarea circulară neuniformă ω este variabil, funcţie de timp. De exemplu, în mişcarea circulară uniform variată poţi deduce uşor relaţii analoge celor din mişcarea liniară uniform variată :

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = const \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0), \qquad (2.38)$$

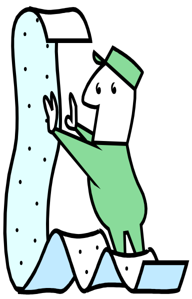
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \theta = \int \omega dt = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\varepsilon(t - t_0)^2, \qquad (2.39)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3\varepsilon(\theta - \theta_0), \qquad (2.40)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2}(t - t_0) = \theta_0 + \overline{\omega}(t - t_0), \text{unde } \overline{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}. \qquad (2.41)$$

Numărul de rotaţii efectuate este

$$N = \frac{\theta - \theta_0}{2\pi}. \qquad (2.42)$$



Unitatea de măsură a acceleraţiei unghiulare este egală cu acceleraţia unghiulară a unui mobil aflat în mişcare circulară uniform accelerată a cărui viteza unghiulară creşte cu o unitate ($1s^{-1}$) într-o secundă:

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = 1s^{-2}. \qquad (2.43)$$

În mişcarea circulară oarecare, forţa are componentele,

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2.44)$$

de unde

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\varepsilon R = m\frac{d\omega}{dt}R = m\frac{d^2\theta}{dt^2}R \\ F_n = ma_n = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega v \end{cases} \qquad (2.45)$$

iar vectorial:

$$\begin{cases} \vec{F}_t = m\vec{\varepsilon} \times \vec{R} \\ \vec{F}_n = m\vec{\omega} \times \vec{v} = -m\omega^2\vec{R} = -m\frac{v^2}{R^2}\vec{R} \end{cases} \qquad (2.46)$$

şi

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (2.47)$$

În mişcarea circulară uniformă v=const, dar $\vec{v} \neq const$, deci $a_t=0$ şi $F_t=0$, dar

$$a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0, \qquad (2.48)$$

(β=0), acceleraţia este centripetă, deci şi forţa este centripetă.
Mişcările descrise până în acest moment nu epuizează nici de departe situaţiile posibile. Pentru amuzament , gândeşte-te cum sunt combinate mişcări circulare şi liniare pentru furnicile din imaginile 2.8 şi 2.9.

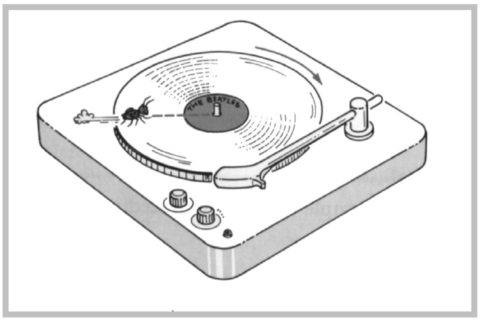


Figura 2.8

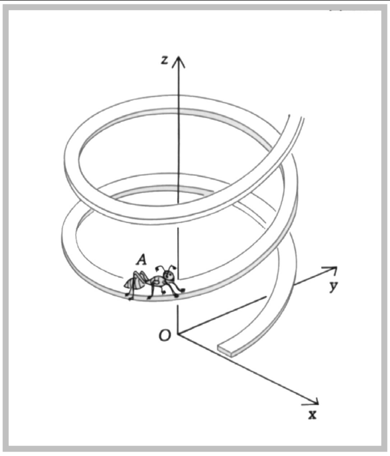
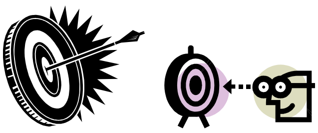


Figura 2.9

Descrierea unor mişcări mai complicate cere aprofundarea câtorva noţiuni matematice referitoare la vectori.

2.5. *Test de autoevaluare2. 1*

Răspunde la următoarele întrebări:



1. Ce traiectorie descrie un mobil în mişcarea circulară?

2. Cum defineşti viteză unghiulară? Care este unitatea sa de măsură în S.I.?

3. Defineşte perioada şi frecvenţa de rotaţie. Care este relaţia dintre ele?

4. Există acceleraţie în mişcarea circulară uniformă?

5. Descrie acceleraţia unghiulară pentru mişcarea circulară uniform accelerată

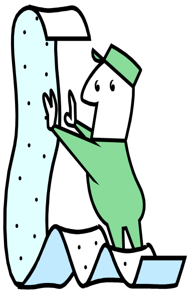
Răspunsurile le găseşti la pagina 41

2.6. *Produsul scalar şi produsul vectorial*

a) Expresia analitică a produsului scalar într-un sistem de coordonate ortogonal se obţine astfel:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \quad (2.49)$$

deoarece



$$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1 \text{ si } \vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\vec{i}=0. \quad (2.50)$$

Pe de altă parte, notând

$$|\vec{a}|=a \text{ si } |\vec{b}|=b, \quad (2.51)$$

poţi scrie:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right), \text{ de unde } \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}. \quad (2.52)$$

Produsul scalar a doi vectori perpendiculari este nul.

b) Poţi obţine expresia analitică a produsului vectorial într-un sistem de coordonate ortogonal ca mai jos

$$\begin{cases}\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\\ \vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}\end{cases} \quad (2.53)$$

sau sub forma de determinant:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\sin\left(\vec{a}\vec{b}\right), \quad (2.55)$$

deoarece:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0 \text{ si } \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}. \quad (2.56)$$

Doi vectori paraleli au produsul vectorial nul.

c) Cu ajutorul formulelor de mai sus poţi demonstra expresia produsului mixt, care este simetric la permutări circulare:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \quad (2.57)$$

şi dezvoltarea dublului produs vectorial:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right). \quad (2.58)$$

Produsul mixt este numeric egal cu volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori.

2.7. *Derivata unui vector. Formulele Poisson*

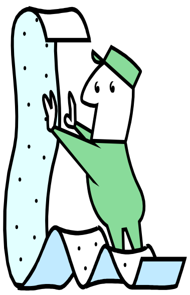
Consideraţiile următoare îşi pot părea prea sintetice dar, dacă le vei asimila, mai toate deducerile care se găsesc în primele 4-5 unităţi de învăţare devin foarte simple.

Derivata unui vector variabil, dar de modul constant, este perpendiculară pe vector:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{2}=const \Rightarrow \frac{d\vec{u}^{2}}{dt}=2\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt}\perp d\vec{u}\,. \qquad (2.59)$$

Într-adevăr, vectorul fiind constant, ca mărime, singura lui schimbare ar putea să fie doar ca direcţie, ca orientare. Adică pe un cerc de rază cât vectorul sau pe o sferă, în spaţiu.

Derivata $\frac{d\vec{u}}{dt}$ are semnificaţia vitezei de variaţie a vectorului $\vec{u}$ sau a vitezei de deplasare a vârfului vectorului $\vec{u}$. De aceea se poate introduce viteza unghiulară momentană $\vec{\omega}$ de rotaţie a vectorului $\vec{u}$:



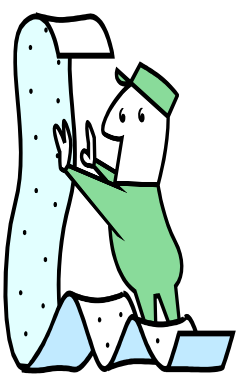
$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{u} \qquad (2.60)$$

Dacă

$$|\vec{u}|=const \Rightarrow \vec{\omega}\perp\frac{d\vec{u}}{dt}. \qquad (2.61)$$

Vectorul $\vec{\omega}$ nu este complet determinat, dar trebuie să fie situat într-un plan perpendicular pe $\frac{d\vec{u}}{dt}$. *Ţinând seama că derivata unui vector de direcţie fixă, variabil doar în modul, este paralelă cu vectorul, putem concluziona că derivata unui vector este în general oblică faţă de vector şi se descompune într-o componentă longitudinală, paralelă cu vectorul dat, determinată de variaţia modulului vectorului şi o componentă transversală, normală pe vectorul dat, determinată de variaţia direcţiei vectorului.*

Derivatele versorilor unui sistem de coordonate ortogonal mobil se exprimă în fiecare moment prin produsele vectoriale:



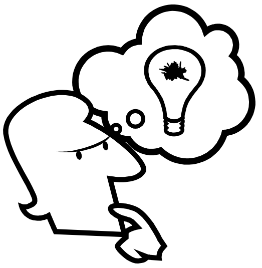
$$\begin{cases}\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}=\omega_z\vec{j}-\omega_y\vec{k}\\ \frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j}=-\omega_z\vec{i}+\omega_x\vec{k}\,,\\ \frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}=\omega_y\vec{i}-\omega_x\vec{j}\end{cases} \qquad (2.62)$$

unde $\vec{\omega}$ este un vector unic determinat, adică rezultă dintr-o rotaţie infinitezimală cu viteza unghiulară momentană $\vec{\omega}$. Relaţiile de derivare a versorilor unui sistem de coordonate poartă numele de ***formulele lui Poisson***.

În paragrafele care urmează vor fi analizate, folosind cunoştinţele acumulate, câteva mişcări observate în mod comun.

2.8. *Pendulul conic*

Un corp mic cu masa *m,* suspendat de un fir inextensibil de lungime *L* se roteşte descriind un cerc orizontal cu raza *r* ca în figura 2.10. Dacă firul este tot timpul generatoare a unei pânze de con, sistemul este denumit pendul conic.



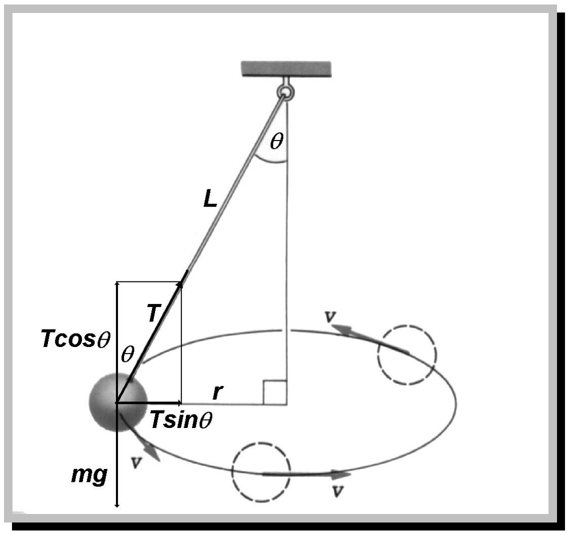


Figura 2.10

Aşa cum rezultă din figură, corpul se află în interacţiune cu Pământul – care-i imprimă greutatea *mg*, şi cu firul care-l susţine cu tensiunea *T.* Rezultanta acestor două forţe, situată în planul traiectoriei şi orientată către centrul cercului îndeplineşte rolul unei forţe centripete. Pe componente poţi scrie că:

$$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\sin\theta = \dfrac{mv^2}{r} \end{cases} \qquad (2.63)$$

Prin împărţirea celor două relaţii rezultă

$$tg\theta = \frac{v^2}{r \cdot g} \qquad (2.64)$$

Din motive geometrice

$$r = L \cdot \sin\theta \qquad (2.65)$$

şi prin urmare

$$v = \sqrt{r \cdot g \cdot tg\theta} = \sqrt{L \cdot g \cdot tg\theta \cdot \sin\theta} \qquad (2.66)$$

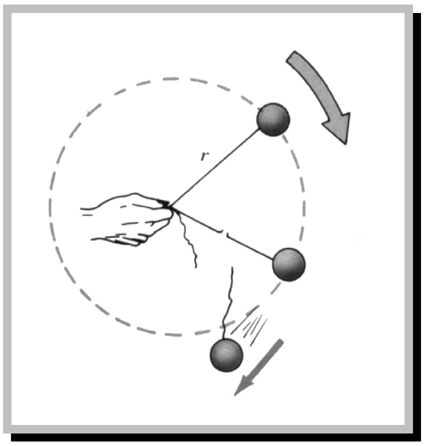
Perioada revoluţiei pendulului T_r (care nu trebuie confundată cu tensiunea din fir *T*) are expresia

$$T_r = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{r \cdot g \cdot tg\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} \qquad (2.67)$$

Relaţia (2.66) îţi arată că mărirea vitezei determină creşterea unghiului dintre fir şi verticală. Prin consecinţă din prima relaţie (2.63) îţi rezultă că mărirea vitezei determină creşterea tensiunii în fir.

2.8.1. Problemă rezolvată

O bilă cu masa de 0,5 kg este legată de un fir de lungime 1,5 m . Bila se roteşte într-un plan orizontal ca în figura 2.11. Dacă firul rezistă la o tensionare maximă de 50N, găseşte viteza maximă pe care o poate avea bila fără ca firul să se rupă.



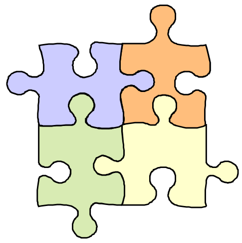


Figura 2.11

Forţa centripetă este – în acest caz – tensiunea T din fir.

$$T = \frac{m \cdot v^2}{r} \qquad (2.68)$$

Determinarea valorii vitezei din datele problemei conduce la

$$\begin{cases} v_{\max im} = \sqrt{\dfrac{T_{\max im} \cdot r}{m}} \\ v_{\max im} = 12{,}2 m/s \end{cases} \qquad (2.69)$$

2.9. *Aruncarea pe oblică*

O situaţie curentă de mişcare pe o traiectorie curbilinie, este aceea a aruncării pe o oblică în câmp gravitaţional uniform. În continuare vei analiza mişcarea unei mingii de golf, lansată cu viteza v_0 sub unghiul θ faţă de orizontală . Vei neglija rezistenţa aerului.

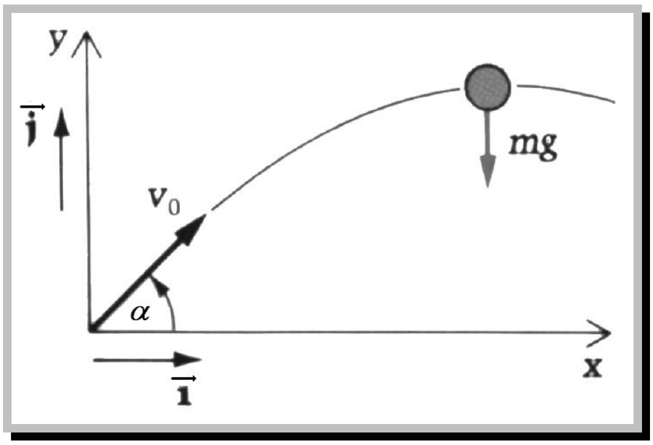


Figura 2.12

Pentru rezolvarea problemei, sistemul convenabil de referinţă este unul rectangular cu versorii $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; se poate presupune că, la momentul iniţial, mingea se află în originea acestui sistem. Dacă $\vec{r} = (x, y, z)$ este

vectorul de poziţie al centrului de masă, acceleraţia corpului are expresia

$$\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = -g\vec{j} \qquad (2.70)$$

Pentru mişcările pe cele trei direcţii poţi scrie

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \qquad (2.71)$$

şi prin integrare îţi rezultă pentru viteze

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_1 \\ \dot{z} = C_3 \end{cases} \qquad (2.72)$$

Dacă ţii seama de condiţiile iniţiale vei obţine

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos\theta \\ C_2 = v_0 \sin\theta \\ C_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.73)$$

şi printr-o nouă integrare,

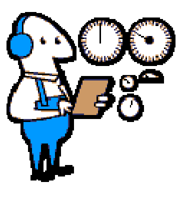
$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta + C_4 \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\theta + C_5 \\ z = C_6 \end{cases} \qquad (2.74)$$

Forma finală a legilor de mişcare în care ai ţinut seama de condiţiile iniţiale este

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad (2.75)$$

Aceste relaţii descriu o parabolă în planul xOy determinat de viteza iniţială şi acceleraţia gravitaţională verticală.

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} + x \cdot tg\theta \qquad (2.76)$$



Dacă vei nota cu t_1 timpul la care se atinge înălţimea maximă (pentru care $\dot{y}(t_1) = 0$) rezultă

$$\begin{cases} 0 = -gt_1 + v_0 \sin\theta \\ t_1 = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g} \\ y_{\max im} = y(t_1) = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \end{cases} \qquad (2.77)$$

Dacă vei nota cu t_2 timpul la care mingea atinge din nou Pământul

$$\begin{cases} 0 = y(t_2) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t_2 \sin\theta \\ t_2 = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} \\ x_{\max im} = \dfrac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \end{cases} \qquad (2.78)$$

Poţi uşor că, mingi lansate din acelaşi punct, sub unghiuri complementare cad în acelaşi loc. „Bătaia” maximă se realizează pentru lansarea sub un unghi de 45^0.

2.9.1. Probleme rezolvate

a. Cât de departe poate fi aşezată cutia din figura de mai jos, pentru ca tunarul să poată trimite o ghiulea în ea? Consideră ca viteza ghiulelei la ieşirea din tun este de $30 m/s$ şi că acceleraţia gravitaţională este $g = 10 m/s^2$.

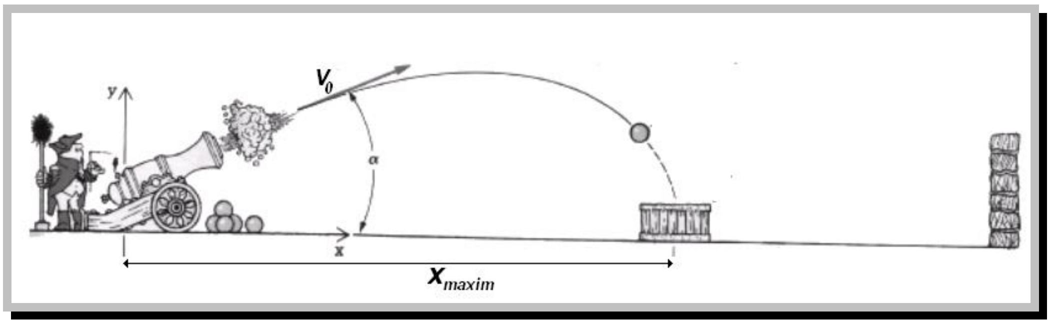


Figura 2.13

Distanţa maximă la care poate fi trimisă ghiuleaua se realizează pentru cazul în care unghiul de aruncare α respectă condiţia
$\sin 2\alpha = 1$
Corespunzător, din ultima relaţie din ansamblul (2.78) rezultă

$$\begin{cases} x_{\max im} = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \\ x_{\max im} = 90m \end{cases} \qquad (2.79)$$

b. Găseşte unghiul de lansare cu care este lansat proiectilul din figură pentru a putea lovi în dreptul unui punct aflat la distanţa *d* de tun

bombardierul care zboară cu viteza constantă v_{bomb} la înălţimea constantă H. Consideră că proiectilul nu poate urca mai sus de înălţimea H. Determină, de asemenea, distanţa pe orizontală dintre avion şi tun la momentul în care se execută tragerea.

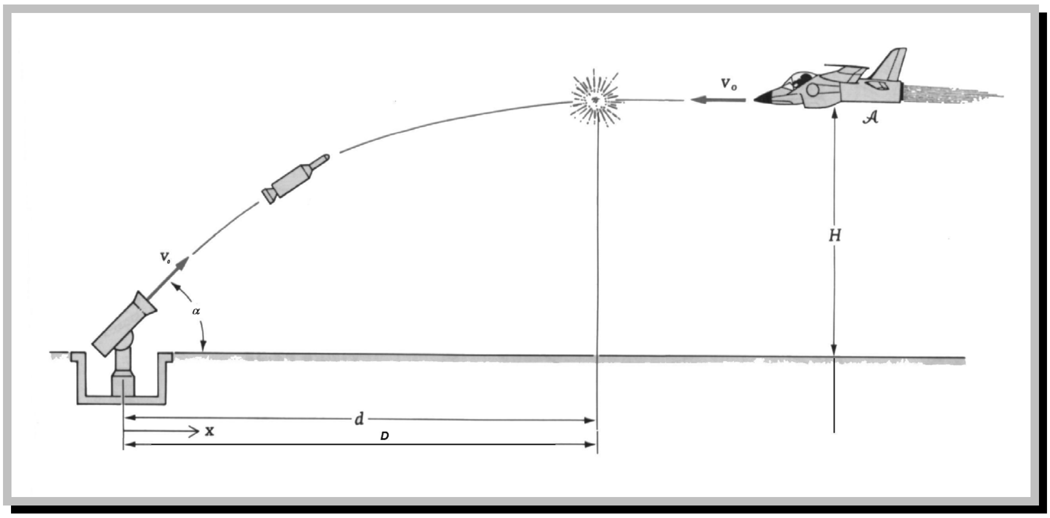


Figura 2.14

Punctul de înălţime maximă al traiectoriei proiectilului trebuie să aibă coordonatele (d,H).

Prin urmare

$$\begin{cases} \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = d \\ \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = H \\ \dfrac{d}{H} = 2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ tg\alpha = \dfrac{2H}{d} \end{cases} \qquad (2.80)$$

Se poate ţine seama de relaţia

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad (2.81)$$

dar se poate calcula şi direct timpul de zbor al proiectilului

$$t_{zbor} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \qquad (2.82)$$

În acest timp avionul parcurge distanţa $v_{bomb}t$

Distanţa pe orizontală dintre tun şi avion este

$$D = d + v_{bomb}\sqrt{\frac{2d}{g}} \qquad (2.83)$$

2.10. *Cinematica solidului rigid*

În mişcarea lor, majoritatea obiectelor din natură sunt departe de a putea fi considerate puncte materiale. Ele sunt „colecţii de puncte”.

Fiecare punct al unui solid se mişcă după reguli proprii. Este esenţială determinarea unor metode de descriere cât mai economică a ansamblului. De exemplu, în mişcarea unei roţi de bicicletă în jurul axului propriu toate punctele oricărei spiţe au aceeaşi viteză unghiulară. Apare o simplificare importantă a studiului dacă poziţiile relative ale punctelor din solid rămân neschimbate în cursul mişcării adică dacă obiectul este nedeformabil. Toate corpurile din natură sunt mai mult sau mai puţin deformabile. Atunci când în problema considerată poţi neglija deformările corpului, te afli în aşa numita aproximaţie a ***solidului rigid***.

2.10.1. Translaţia şi rotaţia

Mişcarea de translaţie a solidului reprezintă acea mişcare în care orice dreaptă legată rigid de solid se deplasează paralel cu ea însăşi. Toate punctele corpului au traiectorii, viteze şi acceleraţii identice, de aceea mişcarea de translaţie este complet determinată de mişcarea unui singur punct arbitrar al corpului (deci se aplică modelul punctului material).
Viteza şi acceleraţia de translaţie sunt vectori liberi, ale căror puncte de aplicaţie pot fi alese în orice punct al corpului.
Mişcarea de rotaţie a solidului este acea mişcare în care toate punctele solidului descriu cu aceeaşi viteză unghiulară cercuri paralele ale căror centre sunt situate pe o dreaptă numită axa de rotaţie.
Viteza unghiulară $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, aceeaşi pentru toate punctele rigidului, se reprezintă printr-un vector de modul ω, situat de-a lungul axei de rotaţie în sensul dat de regula burghiului. Vectorul $\vec{\omega}$ este vector glisant sau alunecător, al cărui punct de aplicaţie poate fi ales în orice punct al axei de rotaţie.

2.10.2. Distribuţia vitezelor

În figura 2.15 este prezentată mişcarea punctelor unui disc care se rostogoleşte de-a lungul unei linii drepte astfel încât viteza de translaţie a centrului discului să fie constantă.

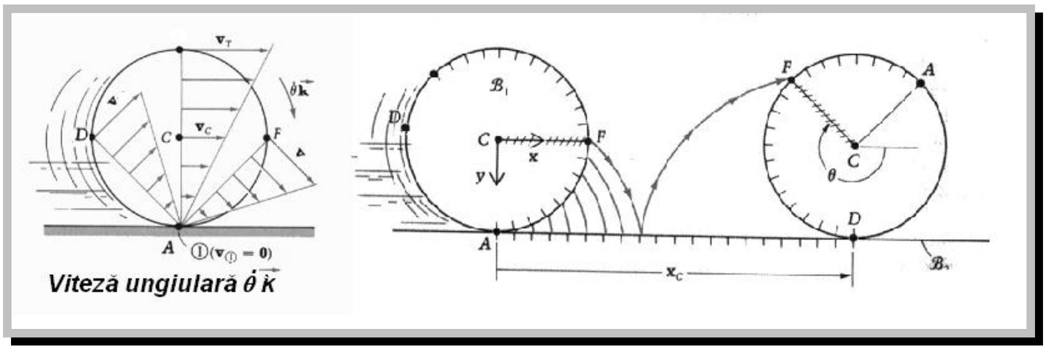


Figura 2.15

Mişcările unor puncte de pe circumferinţă sunt diferite, dar între vitezele lor există corelaţii. Pentru analiza unor mişcări complexe poţi introduce un sistem de coordonate *S′* legat rigid de corp şi care se mişcă deci solidar cu corpul, numit sistem de coordonate propriu.

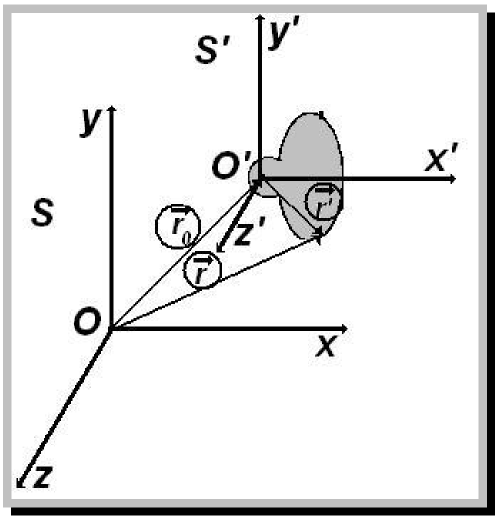


Figura 2.16

În aceste sisteme un vector de poziţie se scrie

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \qquad (2.84)$$

unde $\vec{r}'$ este fix faţă de S' (adică x', y', z' fixe), dar se mişcă faţă de sistemul de coordonate notat S, odată cu S'. Prin derivare vei obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_0}{dt} + \dfrac{d\vec{r}'}{dt}, \text{iar } \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \dfrac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0 \\ \dfrac{d\vec{r}'}{dt} = x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt} + z'\dfrac{d\vec{k}'}{dt} \end{cases}, \qquad (2.85)$$

unde $\vec{v}$ este viteza punctului P, iar $\vec{v}_0$ este viteza punctului O'. Dacă aplici formulele lui Poisson, vei avea :

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = x'\vec{\omega} \times \vec{i}' + y'\vec{\omega} \times \vec{j}' + z'\vec{\omega} \times \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{r}', \qquad (2.86)$$

Observă că ai obţinut în urma acestor calcule formulele lui Euler:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot}, \qquad (2.87)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = \vec{v}_{tr} \\ \vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) \end{cases}, \qquad (2.88)$$

ceea ce înseamnă că deplasarea infinitezimală a solidului

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \qquad (2.89)$$

se descompune în fiecare moment într-o translaţie infinitezimală

$$d\vec{r}_0 = \vec{v}_0 dt \qquad (2.90)$$

şi o *rotaţie infinitezimală*

$$d\vec{r}' = \vec{v}_{rot} dt \qquad (2.91)$$

în jurul unei axe trecând prin O', cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ ($\vec{v}_0$ şi $\vec{\omega}$ sunt în general funcţii de timp).

În fiecare moment viteza oricărui punct P al rigidului este egală cu viteza unui alt punct oarecare O' al rigidului, $\vec{v}_0$, plus o viteză de rotaţie

în jurul unei axe trecând prin punctul O' $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$. Prin urmare mişcarea rigidului se descompune în mişcarea de translaţie a unui punct oarecare al acestuia şi o rotaţie în jurul unei axe trecând prin acel punct.

1) Viteza unghiulară ω este o caracteristică intrinsecă a mişcării corpului, adică modulul şi direcţia vectorului $\vec{\omega}$ sunt independente de sistemul de coordonate S' propriu ales, doar axa de rotaţie se deplasează paralel cu ea însăşi în noul pol ales. Cu alte cuvinte, prin schimbarea polului vectorul $\vec{\omega}$ se deplasează echipolent în noul pol.
Într-adevăr, putem trece de la S' iniţial la oricare altul S" în două etape. Întâi rotim S' astfel încât axele să devină paralele cu S', atunci $\vec{\omega}$ devine $\vec{\omega}\,'$ faţă de S' rotit, dar din condiţia

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,', \qquad (2.92)$$

rezultă

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}\,') \times \vec{r}\,' = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}\,', \qquad (2.93)$$

deoarece $\vec{r}\,'$ este arbitrar. La trecerea sistemului rotit la cel final S", printr-o translaţie, derivatele vectorilor nu sunt afectate şi deci $\vec{\omega} = \vec{\omega}\,'$.

2) Toate punctele corpului au în fiecare moment aceeaşi proiecţie (componenta longitudinală) a vitezei pe axa de rotaţie, independentă de S' propriu ales. Înmulţind relaţia de mai sus scalar cu $\vec{\omega}$ şi ţinând seama că $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ este perpendicular pe $\vec{\omega}$ şi deci produsul lor scalar este nul, obţii

$$\vec{\omega}\vec{v} = \vec{\omega}\vec{v}_0, \qquad (2.94)$$

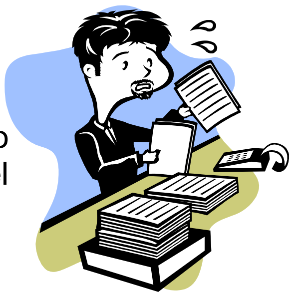
de unde:

$$v_{//} = v\cos(\vec{\omega}, \vec{v}) = v_{0//} = v_0\cos(\vec{\omega}, \vec{v}_0). \qquad (2.95)$$

Deoarece viteza de translaţie este viteza punctului ales drept pol şi deoarece axa de rotaţie se poate deplasa doar paralel, oriunde am alege polul obţinem aceeaşi componentă longitudinală a translaţiei, rotaţia generând numai viteze perpendiculare pe axa de rotaţie.
Deci, putem deplasa vectorul $\vec{\omega}$ paralel cu el însuşi schimbând polul şi schimbând corespunzător doar componenta transversală a vitezei, cea longitudinală neputând fi schimbată. Produsul scalar $\vec{\omega} \cdot \vec{v}$ este un invariant al mişcării.

2.11. *Lucrare practică*

Determinarea perioadei unei mişcări de rotaţie.
Prin definiţie perioada este durata unei rotaţii complete.

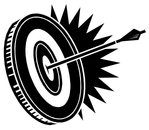


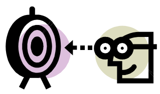
A. Poţi determina perioada prin cronometrarea unei singure rotaţii, o tură cum s-ar zice dacă e vorba de un sistem mai lent (un carusel de pildă, roata mare la un tractor care merge la pas etc.)

B. Dacă rotaţia este mai rapidă sau vrei să măsori mai exact, cronometrează durata mai multor rotaţii, (10, 20, 50 sau chiar 100) şi împarte această durată la numărul de rotaţii.
Poţi alege o roată de fântână, o roată de la o bicicletă ţinută ridicată pe care ai pus o pată de vopsea sau chiar un motoraş mai lent.
C. Folosind un editor de texte, scrie un protocol în care descrie mişcările circulare pe care ţi-ai propus să le analizezi. Descrie măsurările pe care le-ai făcut şi tabelează rezultatele acestor măsurări. Analizează sursele de eroare şi estimează aceste erori.

2.12. *Test de autoevaluare 2.2*

Răspunde la următoarele întrebări:





1. Care este definiţia razei de curbură pentru un punct de pe traiectorie?

2. Care este valoarea acceleraţiei normale pentru o mişcare curbilinie în punctul în care viteza mobilului are valoarea de $10 m/s$ iar raza de curbură este de 2m ?

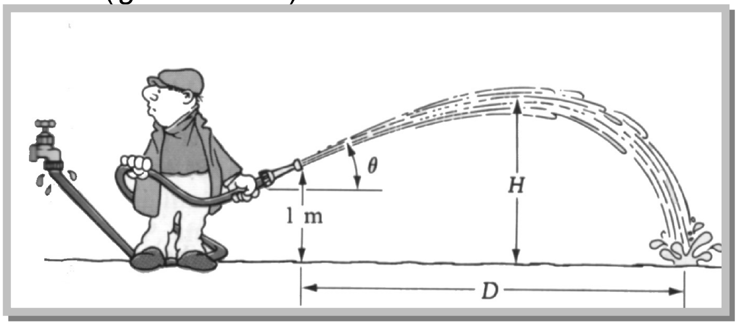
3. Calculează expresiile

$$\begin{cases} \vec{i}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right) \\ \vec{j}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right) \\ \vec{i}\cdot\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right) \\ \vec{i}\times\left(\vec{j}\times\vec{k}\right) \end{cases}$$

4. Calculează unghiul sub care a fost lansat un corp cu viteza iniţială v_0 şi care ajunge la distanţa *D* de punctul de lansare. Acceleraţia gravitaţională este *g*. Consideră ca acel corp pleacă de la nivelul zero şi ajunge la nivelul zeroşi că acceleraţia gravitaţională este *g*.

Testul de autoevaluare 2.2 - continuare

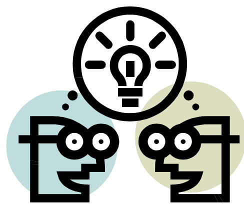
5. Calculează distanţa maximă la care poate stropi grădinarul din figură, dacă apa iese din furtun cu viteza de $10 m/s$ sub un unghi de 45^0 ($g = 10 m/s^2$).



Răspunsurile le găseşti la paginile 42-43.

2.13. *Răspunsuri la testele de autoevaluare*

Testul de autoevaluare2. 1 Răspunsuri



1. În mişcarea circulară, traiectoria unui mobil este un cerc.

2. $\omega \overset{def}{=} \frac{d\theta}{dt}$ este viteza unghiulară instantanee sau momentană şi reprezintă unghiul la centru parcurs de un mobil în mişcare circulară în unitatea de timp. Ea se măsoară în rad $\cdot s^{-1}$.

3. Perioada de rotaţie T reprezintă timpul necesar efectuării unei rotaţii complete. Frecvenţa de rotaţie ν reprezintă numărul de rotaţii efectuate în unitatea de timp (secundă, minut, oră). Relaţia dintre cele două mărimi este $\nu = \frac{1}{T}$

Testul de autoevaluare 2.1 Răspunsuri

Continuare

4. Da. Acceleraţia normală datorată schimbării direcţiei vitezei ce are modul constant $a_n = \dfrac{v^2}{R} \neq 0$

5. Acceleraţia unghiulară ε se datorează variaţiei modulului vitezei. Are direcţia tangentă la traiectorie în punctul la care se referă. Expresia sa este $\varepsilon \overset{def}{=} \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

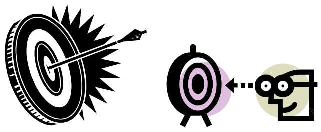
Acceleraţia unghiulară este corelată cu acceleraţia tangenţială $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}R = \varepsilon R$

Testul de autoevaluare 2.2. Răspunsuri

1. Raza de curbură este limita raportului arcului de curbă şi unghiul tangentelor în capetele arcului când lungimea arcului tinde spre zero $R = \dfrac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}\theta}, [\mathrm{C}] = \dfrac{rad}{m}$

2. Conform definiţiei. $a = \dfrac{v^2}{R}$, $a = 50 m/s^2$ - de mai mult de 5 ori mai mare ca acceleraţia gravitaţională.

3. $\begin{cases} \vec{i} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{k}\right) = 1 \\ \vec{j} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{k}\right) = 0 \\ \vec{i} \cdot \left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right) = 0 \\ \vec{i} \times \left(\vec{j} \times \vec{k}\right) = -\vec{k} \end{cases}$



Testul de autoevaluare 2.2. Răspunsuri continuare

4. Din expresia traiectoriei $y = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x \cdot tg\theta$, pentru punctul de cădere care are coordonatele $(D,0)$ în sistemul de coordonate cu originea în punctul de lansare se poate scrie

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{gD^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + tg\theta \cdot D;\ 0 = -\dfrac{gD}{2v_0^2\cos\ \theta} + \sin\theta \\ \left(\dfrac{gD}{v_0^2}\right) = 2\sin\theta\cos\theta;\quad \theta = \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{gD}{v_0^2}\right) \end{cases}$$

5. Ecuaţia traiectoriei pentru situaţia descrisă este $y = -\dfrac{x^2}{10} + x,$ şi pentru punctul de cădere de coordonate $(x,-1)$ se poate scrie

$x^2 - 10x - 10 = 0$ adică

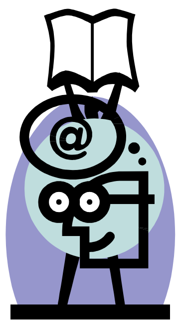
$x \approx 11m/s$

2.14. *Lucrare de verificare 2*

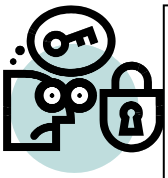
Trimite tutorelui răspunsurile pe care le consideri corecte

1. Pornind de la reprezentarea grafică găseşte expresia acceleraţiei centripete. *(1 punct)*
2. Un mobil se mişcă uniform variat pe un cerc de rază R=10cm. Află acceleraţia normală a_n a mobilului după t=20s, ştiind că după N_0=5 rot de la pornire viteza mobilului este v_0=10cms^{-1}. *(2 puncte)*
3. Găseşte viteza la cădere şi unghiul format de direcţia acestei viteze cu orizontala pentru ghiuleaua din problema 2.9.1. *(2 puncte)*
4. Descrie mişcarea unui pendul conic într-o navă cosmică în care atracţia gravitaţională este neglijabilă. *(1 puncte)*
5. Efectuează lucrarea practică propusă. Protocolul redactat adaugă-l acestei lucrări. *(3 punct)*

Notă: Se va acorda un punct din oficiu *Total 10 puncte*



2.15. *Termeni şi expresii cheie. Formule cheie*



Formule cheie

- **Acceleraţie medie** $\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$;
- **Acceleraţie momentană** $\vec{a} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$;
- **Curbură** $C \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$;
- **Raza de curbură** $R = \frac{1}{C} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$;
- **Acceleraţie unghiulară** $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$;
- **Acceleraţie tangenţială** $\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}$;
- **Acceleraţie normală** $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{v^2}{R^2}\vec{R}$;
- **Acceleraţie totală** $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$;
- **Formulele lui Poisson** $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i} = \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k}$, etc
- **Formulele lui Euler**

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot};$$

Termeni şi expresii cheie

- **Acceleraţie medie; acceleraţie momentană;**
- **Acceleraţie tangenţială; acceleraţie normală;**
- **Acceleraţie unghiulară;**
- **Mişcare circulară uniformă; mişcare circulară neuniformă;**
- **Frecvenţa mişcării circulare; perioada mişcării circulare;**
- **Aruncare pe oblică;**
- **Mişcarea de translaţie a solidului rigid; Mişcarea de rotaţie a solidului rigid;**

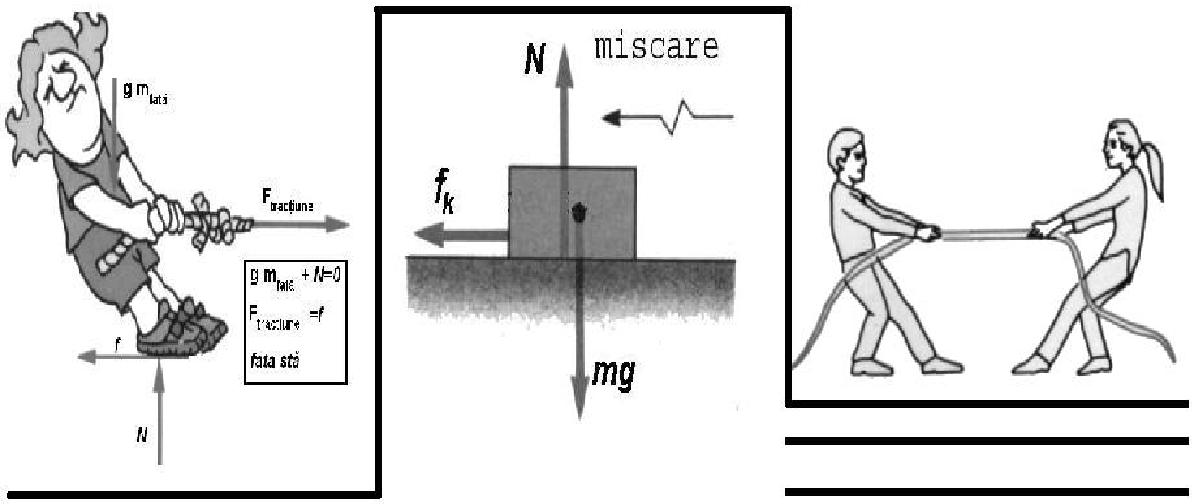
2.16. *Bibliografie*

1.A. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a), pag. 41-49
2.A. P. Hristev, V. Fălie, D. Manda, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984, pag. 34-59, 96-107
3.***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983, pag. 25-26

Unitatea de învăţare 3

PRINCIPIILE DINAMICII

Cuprins **Pagina**

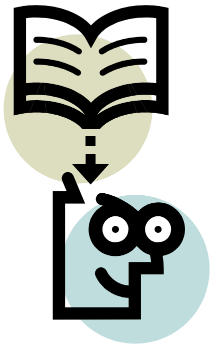


În Principiul 1 apar 0 forţe

În principiul 2 apare 1 forţă

În principiul 3 apar 2 forţe

3.1. *Obiectivele unităţii de învăţare*



Când vei termina de studiat acest capitol vei fi capabil :

- *să enunţi principiile dinamicii;*
- *să enunţi legile frecării;*
- *să explici într-un limbaj fizic adecvat fenomenele mecanice studiate;*
- *să aplici noţiunile, legile şi principiile studiate în rezolvarea de probleme;*
- *să realizezi conexiuni între fenomenele mecanice din mediu şi noţiunile studiate;*

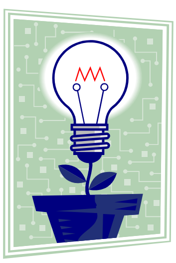
Principiile dinamicii

Dinamica clasică (newtoniană) se bazează pe trei principii, formulate de Isaac Newton în anul 1687.

3.2. *Principul I al dinamicii*

Experienţa îţi arată că un corp în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă faţă de Pământ rămâne în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra lui nu acţionează alte corpuri, care să-i modifice această stare. Prin abstractizare, se ajunge la principiul sau legea inerţiei (prima lege a lui Newton), cunoscută încă de Galilei (1632): ***un punct material rămâne în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acţionează alte corpuri care să-i schimbe această stare de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă.***

Proprietatea unui corp de a-şi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, în absenţa acţiunilor exterioare, *sau de a se opune la orice acţiune exterioară care caută să-i schimbe starea de mişcare*, se numeşte **inerţie**. Astfel, corpurile sunt inerte în sensul că nu-şi pot schimba de la sine starea lor de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă. În virtutea inerţiei, corpurile se mişcă rectiliniu uniform în absenţa acţiunilor exterioare şi datorită inerţiei tind să-şi menţină această stare de mişcare, opunându-se sau reacţionând la acţiunile exterioare.



Inerţia este o noţiune calitativă, dar se obişnuieşte a se spune că masa corpurilor este o măsură a inerţiei. Dar evident, masa este...masa.

Conform principiului inerţiei, mişcarea rectilinie uniformă se autoîntreţine, adică nu necesită nici o acţiune exterioară pentru menţinerea ei. Dimpotrivă, orice acţiune exterioară strică o astfel de mişcare, curbând traiectoria sau modificând valoarea vitezei, adică produce o mişcare accelerată.

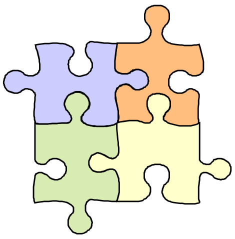


Figura 3.1

Galileo Galilei *1564-1642. Matematician, astronom şi fizician italian profesor al Universităţilor din Pisa şi Padova. A demonstrat experimental că acceleraţia este identică la căderea tuturor corpurilor.*

Este evident că, mişcarea rectilinie uniformă faţă de un sistem de referinţă nu mai este astfel faţă de alte sisteme de referinţă care se mişcă accelerat faţă de primul.

Dacă principiul inerţiei este valabil într-un sistem de referinţă dat, atunci el va fi valabil în toate sistemele de referinţă care se mişcă rectiliniu uniform faţă de acesta.

Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei se numesc sisteme de referinţă inerţiale.

Cunoşti că un sistem de referinţă legat de "planeta" Pământ nu este riguros inerţial, din cauza rotaţiei diurne a Pământului, dar într-o primă aproximaţie poţi considera sistemul de referinţă legat de Pământ ca fiind practic inerţial. Din punct de vedere al principiului inerţiei toate sistemele de referinţă inerţiale sunt absolut echivalente, nici unul nu poate fi considerat fix sau absolut.

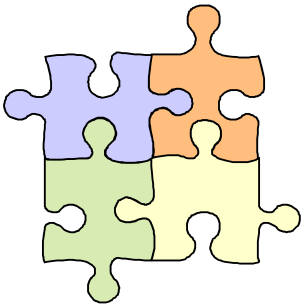


Figura 3.2

Sir Isaac Newton*,1642-1727. Matematician şi fizician englez, profesor la Cambridge, preşedinte al Royal Society. A stabilit legile mişcării şi ale atracţiei gravitaţionale aplicându-le şi în astronomie.*

O formulare generală a principiului inerţiei este următoarea: corpurile suficient de îndepărtate unele de altele (izolate între ele) se mişcă unele faţă de altele rectiliniu uniform.

Există multe formulări ale acestui principiu, depinzând de traducere dar şi de nivelul de adresare.
O formulare uzuală este cea care conţine afirmaţia „***dacă asupra lui nu acţionează alte corpuri***”, dar să remarcăm că este suficient ca acţiunea acestor corpuri să se anuleze reciproc, ***respectiv forţa rezultantă să fie nulă.***

Este important să stabileşti legătura dintre coordonatele unui eveniment faţă de diferite sisteme de referinţă, adică transformările de coordonate care exprimă trecerea de la un sistem de referinţă la altul. Astfel, poţi stabili care aspecte ale fenomenelor şi legilor sunt relative, adică depind de sistemul de referinţă ales, şi care sunt absolute sau invariante, adică independente de alegerea sistemului de referinţă.
Ceea ce vrei să deduci este legătura dintre coordonatele $(\vec{r},t)$, poziţie/timp, măsurate în sistemul *S* şi coordonatele $(\vec{r}\,',t')$ măsurate într-un alt sistem *S'*, aflat în mişcare rectilinie şi uniformă faţă de *S*.
Consideră două sisteme de referinţă notate cu *S* şi *S'*. Presupune că S' se mişcă faţă de *S* rectiliniu uniform cu viteza constantă $\vec{u}$. Faţă de sistemul S, aplicând regula adunării vectoriale, vei avea: $\vec{r}\,'=\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{u}t$, $t'=t-t_0$, unde *ut* reprezintă distanţa *OO'* dintre originile celor două sisteme de referinţă şi toate mărimile sunt măsurate în sistemul *S*. În mecanica clasică newtoniană se consideră că distanţele şi intervalele de timp, măsurate în diferite sisteme de referinţă, sunt aceleaşi, adică au un caracter absolut sau invariant.

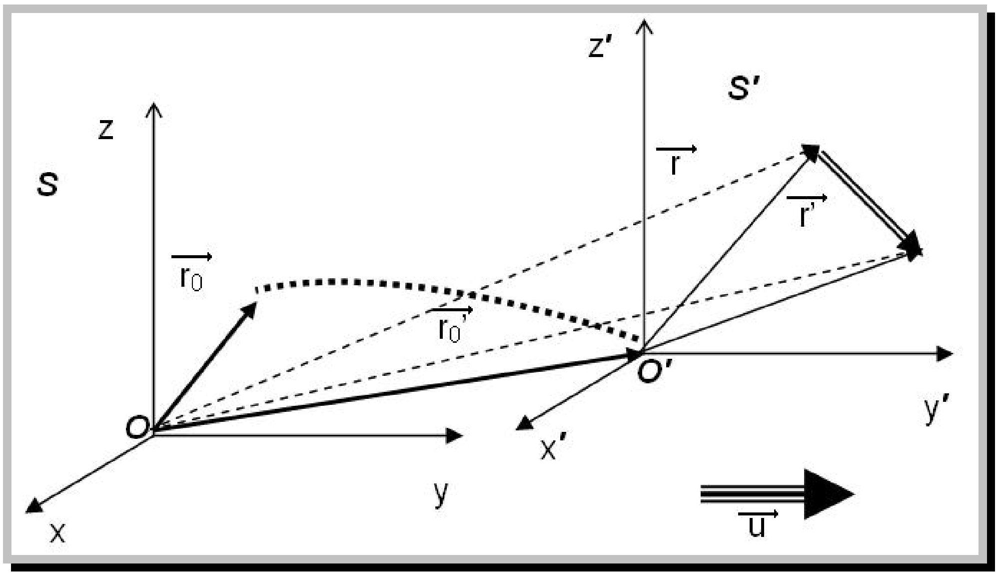


Figura 3.3

Relaţiile de mai sus se numesc transformările lui Galilei şi îţi permit determinarea coordonatelor $(\vec{r}\,',t')$ ale unui eveniment din sistemul S' dacă se cunosc coordonatele $(\vec{r},t)$ ale aceluiaşi eveniment în sistemul S, care se deplasează rectiliniu uniform faţă de S.

Scriind transformările inverse, de trecere de la sistemul S' *la* S,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 + \vec{u}(t' + t_0), \qquad (3.1)$$

$$t = t' + t_0, \qquad (3.2)$$

diferenţiindu-le

$$d\vec{r} = d\vec{r}' + \vec{u}dt', \qquad (3.3)$$

$$dt = dt'$$

şi împărţindu-le membru cu membru

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}' + \vec{u}dt'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}, \qquad (3.4)$$

vei obţine legea clasică de compunere a vitezelor:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \qquad (3.5)$$

Viteza unui corp faţă de sistemul *S* este egală cu ***viteza*** *"***relativă***"* faţă de sistemul *S'* plus ***viteza* de "transport"** a sistemului *S'* faţă de *S*.

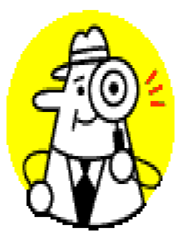
acceleraţia este aceeaşi în toate sistemele de referinţă care se mişcă uniform unele faţă de altele

Diferenţiind relaţiile de compunere a vitezelor şi împărţindu-le la dt=dt', vei obţine legea de compunere a acceleraţiilor:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}'}{dt} \Rightarrow \\ \vec{a} = \vec{a}', \\ \text{deoarece} \\ \vec{u} = \text{const si } d\vec{u} = 0 \end{cases}, \qquad (3.6)$$

Acceleraţia este aceeaşi în toate sistemele de referinţă care se mişcă uniform unele faţă de altele, adică acceleraţia este invariantă faţă de sistemele de referinţă aflate în translaţie relativă uniformă. Dacă acceleraţia este nulă într-un sistem S (corpul este în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform faţă de S), atunci acceleraţia va fi nulă în orice sistem care se mişcă rectiliniu uniform faţă de primul.
Dacă principiul inerţiei este valabil faţă de un sistem de referinţă, deci acesta este inerţial, atunci acest principiu este valabil în toate sistemele de referinţă aflate în mişcare de translaţie uniformă faţă de primul, şi care vor fi de asemenea inerţiale. Reciproc, dacă două sisteme de referinţă sunt inerţiale, atunci ele se află în translaţie.

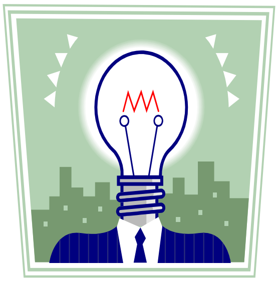
3.3. *Principiul II al dinamicii*



Noţiunea de forţă are la origine senzaţia de efort care apare atunci când ridici sau susţii o greutate, când tragi sau împingi un corp pe o suprafaţă. Totodată poţi indica direcţia şi sensul în care îndrepţi efortul, precum şi punctul unde aplici acest efort.
De aici vei obţine **noţiunea/conceptul** de forţă ca vector. Forţele pot produce efecte statice de deformare a corpurilor sau de echilibrare a altor forţe şi efecte dinamice de modificare a vitezei, adică de producere a acceleraţiei. Măsurarea forţelor se face pe baza efectelor lor. Instrumentul utilizat pentru măsurarea forţelor se numeşte dinamometru.

Dinamometrele cele mai simple sunt nişte resorturi elastice prevăzute cu riglă gradată pentru măsurarea alungirilor, şi deci indirect, a forţelor respective. Dinamometrele moderne pot folosi alte fenomene fizice şi se numesc în general traductoare. În acest caz este vorba de traductoare forţă – deformaţie.

Un obiect elastic poate fi folosit foarte bine ca dinamometru, dacă este etalonat.



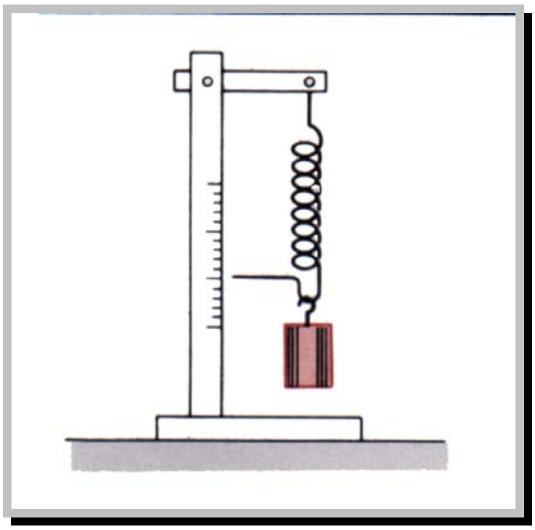


Figura 3.4

Regula paralelo-gramului este un postulat care provine din matematica vectorilor.

Experienţele arată că forţele se compun după **regula paralelogramului**, adică sunt mărimi vectoriale. De aici se poate enunţa ***principiul independentei acţiunii forţelor: un corp, sub acţiunea simultană a două forţe, descrie diagonala unui paralelogram având ca laturi aceste forţe în acelaşi timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acţiunea forţei corespunzătoare.***
Regula paralelogramului este un postulat care provine din matematica vectorilor.

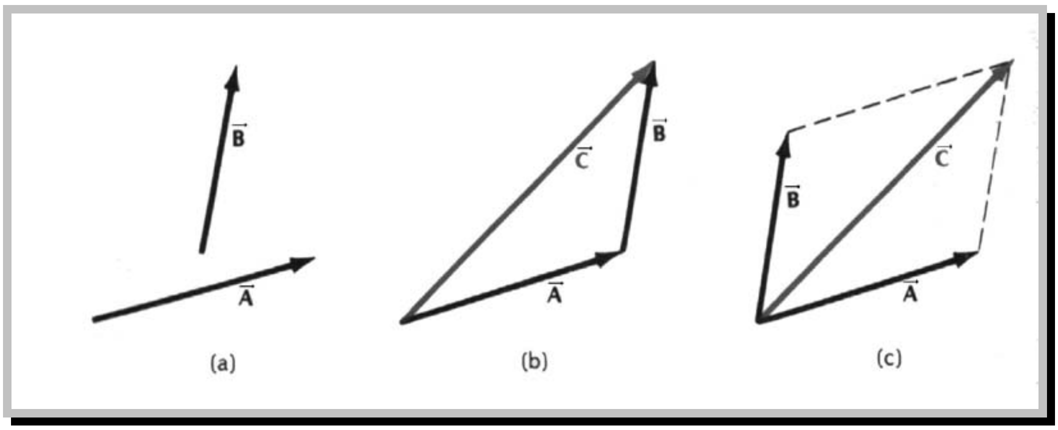


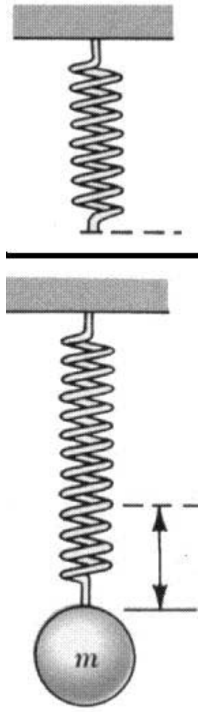
Figura 3.5

Vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ (a) sunt adunaţi cu regula triunghiului (b) şi cu regula paralelogramului (c).

Principiul 2

Dacă aplicăm unui punct material diferite forţe $\vec{F}$, punctul material capătă acceleraţii $\vec{a}$ coliniare şi proporţionale cu forţele aplicate:

$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} \\ \vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{cases}, \qquad (3.7)$$



Masa este o caracteristică a corpurilor care exprimă proporţionalitatea dintre acceleraţia pe care o capătă un corp şi forţa care acţionează asupra corpului (masa inerţială)

$F = m \cdot a$

Masa este o caracteristică a corpurilor care determină mărimea interacţiunii gravitaţionale. Pentru corpuri cu dimensiuni mici în comparaţie cu distanţa dintre ele, modulul forţei de atracţie este direct proporţională cu masa acestora şi invers proporţională cu distanţa dintre acestea . (masa gravitaţională).

$$F_{gravitaţra} = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

unde m este un parametru pozitiv, caracteristic punctului material, numit masă.

Ecuaţia (3.7) reprezintă legea fundamentală a dinamicii. Masa este o mărime scalară, o caracteristică internă a corpului, o măsură a cantităţii de substanţa conţinută de corp. Cu cât masa unui corp este mai mare, cu atât acceleraţia produsă de o forţă dată, este mai mică. De aici rezultă că masa unui corp este o măsură a inerţiei sale, adică o măsură a gradului de opunere sau reacţiune a corpului la acţiunea forţelor exterioare care îi schimbă starea de mişcare rectilinie uniformă sau de repaus. În aceasta calitate de măsură a inerţiei, masa m se numeşte masă inertă sau inerţială şi se manifestă deci, sub dublu aspect: în absenţa forţelor exterioare corpul îşi păstrează mişcarea rectilinie uniformă, conform principiului inerţiei, şi sub acţiunea unei forţe exterioare admite o acceleraţie invers proporţională cu masa sa inertă, conform principiului II.

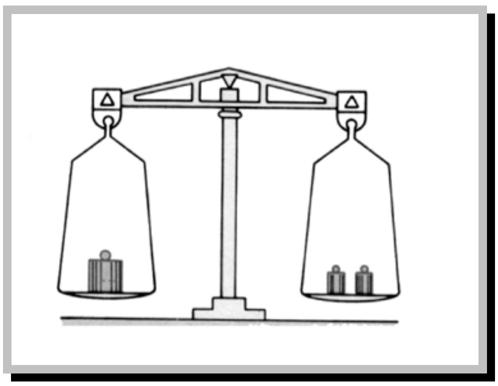
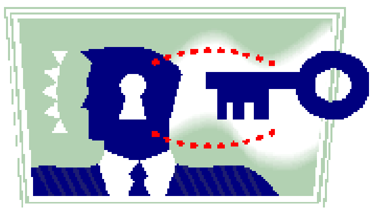
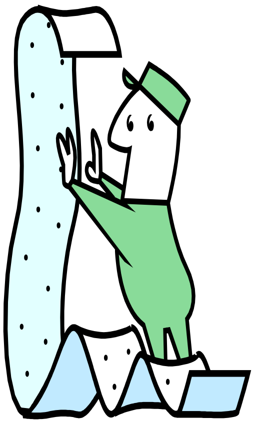


Figura 3.6



Măsurarea masei se face cu ajutorul balanţei. Unitatea de măsură în a masei, numită kilogram (kg), este egală cu masa prototipului de platina-iridiu păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi de la Sevres (Franţa).



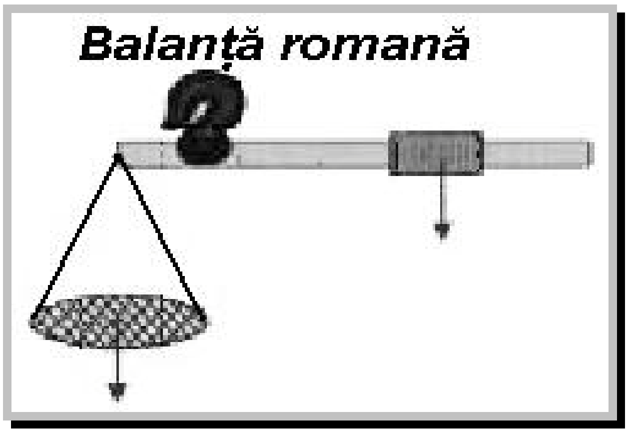


Figura 3.7

În *SI* masa este mărime fundamentală, forţa fiind atunci o mărime derivată. Unitatea de măsură a forţei este:

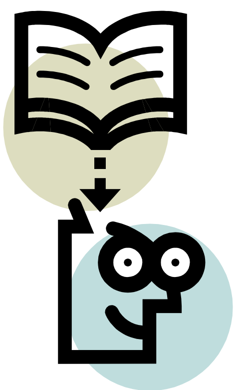
$$[F]=[m][a] \Rightarrow [F]=1kg\frac{m}{s^2}=1N \text{ in SI.} \qquad (3.8)$$

Reţine că *1N* reprezintă valoarea unei forţe care aplicată unei mase egale cu *1kg* îi imprimă acesteia o acceleraţie egală cu $1ms^{-2}$.

Te poţi gândi că de fapt nu se măsoară mase ; de fapt, cu ajutorul balanţelor nu faci altceva decât să compari forţele produse de acele mase sau şi mai exact, momentele acelor forţe !!!

3.4. *Principul III al dinamicii*

Experienţa îţi arată că acţiunea unui corp asupra altui corp are întotdeauna caracterul unei interacţiuni - corpurile acţionează unul asupra celuilalt. Principiul III afirmă că ***fiecărei acţiuni i se opune întotdeauna o reacţiune, egală în modul şi de sens contrar, sau altfel, acţiunile reciproce a două corpuri (puncte materiale) sunt întotdeauna egale în modul şi orientate în sensuri opuse***.
Cele două forţe, acţiunea şi reacţiunea, se aplică simultan, dar **la corpuri diferite.**



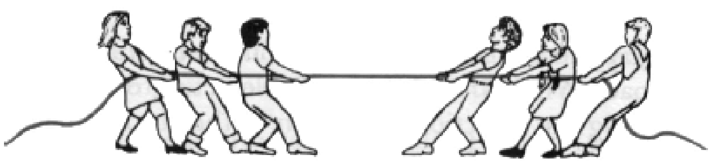


Figura 3.8

Cele trei principii ale dinamicii sunt suficiente pentru studiul mişcării mecanice. Principiul I (al inerţiei) este valabil în toate sistemele inerţiale, fiind folosit la definirea acestor sisteme. Al doilea principiu (al acţiunii forţei) este de asemenea valabil în toate sistemele de referinţă inerţiale.

Deoarece acceleraţia este un invariant al mişcării, iar în mecanica clasică masa unui corp se consideră independentă de sistemul de referinţă, forţa $\vec{F} = m\vec{a}$ este un invariant. Deci, ecuaţia fundamentală a dinamicii are aceeaşi formă în toate sistemele de referinţă inerţiale. Principiile mecanicii newtoniene fiind aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale, rezultă că **toate legile mecanicii** (care sunt consecinţe ale acestor principii) **sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.** Acesta este conţinutul principiului relativităţii în mecanică, stabilit de Galilei în 1632.

Cu ajutorul transformărilor lui Galilei, acest principiu se poate enunţa astfel: legile mecanicii clasice sunt invariante la transformările lui Galilei, pe scurt sunt G-invariante. De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate sistemele de referinţă inerţiale sunt absolut echivalente. Prin urmare, nici o experienţă mecanică efectuată în interiorul unui sistem de referinţă inerţial nu ne permite să determinăm mişcarea sa rectilinie uniformă faţă de alte sisteme de referinţă inerţiale. Lucrurile se schimbă radical într-un sistem de referinţă neinerţial. În acest caz, legile lui Newton nu mai sunt valabile şi cu ajutorul experienţelor mecanice efectuate în interiorul sistemului putem determina acceleraţia acestuia faţă de sistemele de referinţă inerţiale.

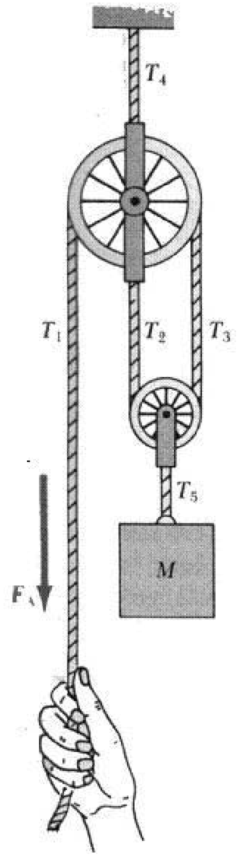
3.4.1. Problema rezolvată 1

Pe cât este cu putinţă**,** enunţul unei probleme trebuie să descrie clar o situaţie fizică „reală”. Studiază cu atenţie enunţul de mai jos.

Pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală se află două corpuri, mici, practic două puncte materiale de mase diferite. Coeficienţii de frecare dintre cele două corpuri şi suprafaţa planului înclinat sunt µ1 şi respectiv µ2.
Află cât timp durează mişcarea şi viteza cu care corpurile ajung la baza planului înclinat.

Nu este clar din enunţ dacă cele două corpuri pleacă de la aceeaşi distanţă de bază şi dacă se mişcă sau nu pe o aceeaşi dreaptă şi dacă se mişcă simultan sau nu.
Textul problemei ar putea fi mai precis exprimat astfel:

Pe un planul înclinat de unghi α=45^0 se află două corpuri, primul la distanţa L=2m de bază, având coeficientul de frecare cu planul înclinat $\mu_1 < \mu_2$ iar cel de al doilea la distanţa L/2=1m de bază, având coeficientul de frecare cu planul înclinat μ_2=0,6. Să se afle vitezele cu care corpurile ajung la baza planului înclinat, dacă, la capătul cursei, ambele corpuri plecate simultan în mişcare, fără viteze iniţiale, ajung la baza planului în acelaşi moment, fără să se fi ciocnit pe drum. Acceleraţia gravitaţională este g=10ms^{-2}.
.



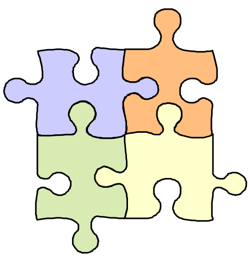
În forma detaliată a problemei, cele două corpuri se aflau la distanţe bine definite de baza planului înclinat şi se precizează că cel mai rapid se află mai jos.

Să urmărim împreună "inconvenientele" problemei primare.
Dacă nu considerăm o greşeală de exprimare, întrebarea referitoare la "viteza" corpurilor (ca şi cea referitoare la "timpul") la singular, reprezintă

- fie o licenţă de limbă care include un plural colectiv distribuibil fiecărui corp, evident un caz nefericit de exprimare
- fie o afirmaţie deliberată a autorului care a ştiut ce întreabă – (şi este regula care trebuie luată ca ipoteză principală) - şi anume cele două corpuri ajung jos cu o singură viteză, adică după o ciocnire plastică undeva pe parcurs.

Constatăm că în enunţ s-a strecurat o aserţiune implicită, fără de care problema nu este rezolvată corect, şi anume că cele două corpuri se vor ciocni - şi anume plastic.
O ciocnire elastică ar implica o ricoşare şi cele două corpuri ar ajunge separat jos, deşi ar mai fi o posibilitate care face problema şi mai complicată.
Tot din textul primar reiese, dat fiind că nu se specifică lungimea planului, că avem $\mu_1 < \mu_2$ şi că spaţiul de alunecare este suficient pentru ca punctul material de sus să îl ajungă din urmă pe celălalt.
Deoarece eşti la o **lecţie de rezolvare** atât "citirea" atentă a textului cât şi luarea în seamă a tuturor variantelor fac parte din obiective. Acest mod de gândire şi de analiză, cu firul despicat în patru, este şi o lecţie de viaţă unde nu toate sunt simple, clar explicate sau cu un profesor alături care să dea sfaturi ori să facă el analiza problemei.

În continuare vei rezolva problema clară, cu aplicaţie de calcul numeric.
Întotdeauna, înainte să începi să rezolvi problema va trebui să faci un desen şi să apoi să răspunzi la întrebările simple ale problemei.



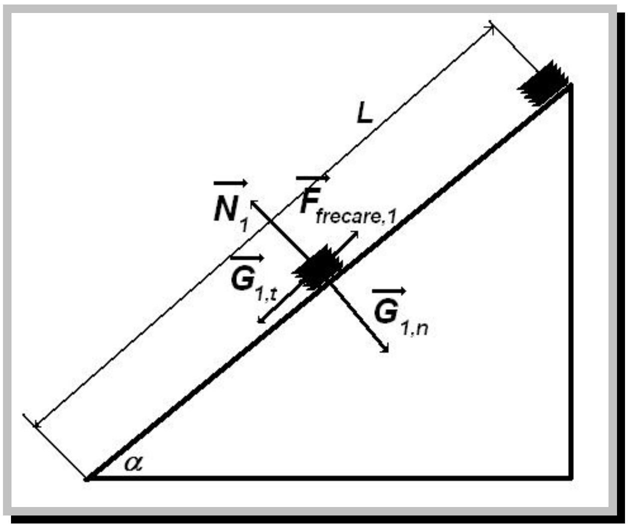


Figura 3.9

Odată antrenaţi cu "problema simplă" îţi va fi uşor să vezi faţetele ascunse ale unor probleme complicate de care poate că te-ai feri, preferând o anumită citire, convenabilă, simplificatoare a textului.
Este adesea mai sugestiv să lucrezi cu componentele greutăţii - în probleme de genul corp pe planul înclinat.

Trebuie să remarci că, în mod deliberat, nu am mai desenat şi vectorul "Greutate" deoarece este substituit de prezenţa celor două componente ale sale.
Totuşi, acest procedeu (cu componente) dublează numărul de "săgeţi" pe desen ceea ce la o problemă mai complicată ar putea fi tare greu de urmărit (dar dacă ai păstra şi vectorul nedescompus şi componentele - s-ar tripla numărul de "săgeţi").
În rezolvarea sugerată nu vei desena forţele pentru ambele corpuri, diagrama fiind aceeaşi.
După aceste desene şi alegerea axelor este evident că cea mai simplă alegere a axelor este cea folosită, respectiv axa *Ox* paralelă cu direcţia de mişcare, direcţia planului, iar axa *Oy* perpendiculară - alegeri care conduc de altfel şi la reprezentarea cu $G_{normal}(G_n)$ şi $G_{tangenţial}(G_t)$.
În continuare trebuie să scrii ecuaţiile de mişcare pentru fiecare direcţie. Vei prefera o ecuaţie "master", vectorială pentru început, aşa, să fie şi imediat proiecţiile acestei ecuaţii (acestora după caz) pe axele de coordonate.
Pentru corpul 1, poţi scrie:

$$\overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{N_1} + \vec{F}_{frecare,1} = m_1 \cdot \overrightarrow{a_1} \qquad (3.9)$$

sau

$$\overrightarrow{G_{1n}} + \overrightarrow{G_{1t}} + \overrightarrow{N_1} + \vec{F}_{frecare,1} = m_1 \cdot \overrightarrow{a_1} \qquad (3.10)$$

Viteza unui corp care alunecă accelerat cu frecare (sau fără frecare) pe un plan înclinat se poate determina ca pentru orice mişcare accelerată, fie direct din formula lui Galilei fie considerând cinematica mişcării, calculând şi timpul în care se realizează această viteză. În ambele cazuri este necesară calcularea acceleraţiei fiecăruia din corpuri.

Proiectând relaţiile pe axele de coordonate alese, vei avea:
pe Ox, direcţia de mişcare, direcţia tangenţială cum se mai spune - observând că unghiul vectorului $\vec{G}$ cu Ox sau cu planul, este complementul lui α - şi deci:

$$\begin{cases} G_{1,t} = G_1 \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha \\ G_{1,n} = G_1 \cos\alpha = m_1 g \cos\alpha \end{cases} \qquad (3.11)$$

Din relaţia „pe componente” pentru direcţia normală va rezulta

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ F_{frecare,1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos\alpha \end{cases} \qquad (3.12)$$

şi prin urmare, pentru direcţia de mişcare”tangenţială”

$$\begin{cases} m_1 g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) = m_1 a_1 \\ a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \end{cases} \qquad (3.13)$$

Legile de mişcare pentru corpul 1 sunt

$$\begin{cases} a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \\ v_1(t) = a_1 \cdot t \\ x_1(t) = \dfrac{a_1 \cdot t^2}{2} \end{cases} \qquad (3.14)$$

Timpul în care corpul parcurge o distanţă dată este

$$t = \sqrt{\frac{2x_1(t)}{a_1}} \qquad (3.15)$$

Relaţii absolut asemănătoare, dar indiciate cu 2 se pot obţine pentru al doilea corp.
Pentru datele problemei

$$\begin{cases} a_2 = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0{,}6) \\ a_2 \cong 2{,}82\, m/s^2 \end{cases} \qquad (3.16)$$

Timpul în care corpul al doilea ajunge la baza planului este

$$\begin{cases} t_2 = \sqrt{\dfrac{L}{a_2}} \\ t_2 = 0{,}84\, s \end{cases} \qquad (3.17)$$

Viteza corpului al doilea la baza planului va fi

$$\begin{cases} v_2(t_2) = \sqrt{L \cdot a_2} = \sqrt{L \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (1 - \mu_2)} \\ v_2(t_2) = \sqrt{\sqrt{2} \cdot 4} \\ v_2(t_2) \cong 2.37\, m/s \end{cases} \qquad (3.18)$$

Pentru ca ambele corpuri să ajungă la baza planului în acelaşi interval de timp,

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{L}{a_2}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot L}{a_1}} \\ \sqrt{\dfrac{L}{g \cdot \cos\alpha \cdot (1 - \mu_2)}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot L}{g \cdot \cos\alpha \cdot (1 - \mu_1)}} \\ \dfrac{1}{(1 - \mu_2)} = \dfrac{2}{(1 - \mu_1)} \end{cases} \qquad (3.19)$$

prin urmare

$$\begin{cases} \mu_1 = 2\mu_2 - 1 \\ \mu_1 = 0{,}2 \end{cases} \qquad (3.20)$$

În consecinţă

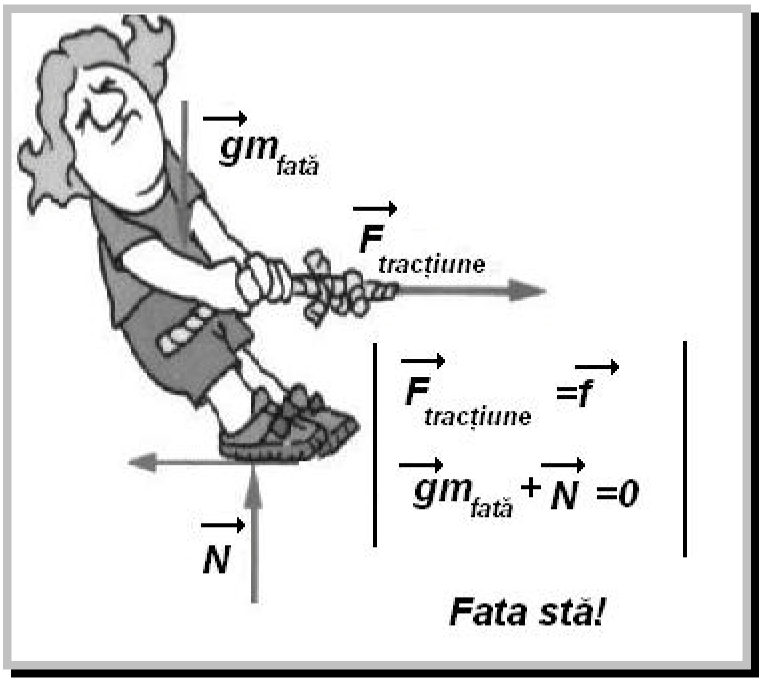
$$\begin{cases} a_1 = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-0,2) \\ a_1 \cong 5,65\, m/s^2 \end{cases} \quad (3.21)$$

Viteza primului corp la baza planului înclinat va fi

$$v_1(t_2) = 4,74\, m/s \quad (3.22)$$

3.5. *Forţe de frecare*

Deja, în problema anterioară, am început să vorbim despre foarte cunoscuta frecare. La contactul dintre două solide apar forţe de frecare. Chiar dacă cele două corpuri nu alunecă unul faţă de celălalt există forţe de frecare între solide, numite forţe de frecare statică sau de aderenţă. În cazul alunecării ele se numesc forţe de frecare cinetică sau de frecare la alunecare. Forţă de frecare statică sau de aderenţă maximă, f_S, este mai mare decât forţa de frecare cinetică sau la alunecare, adică $f_c < f_S$.



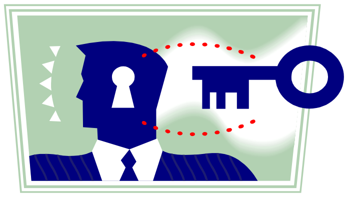


Figura 3.10

Fata din figură ***nu*** *se deplasează pe direcţia pe care este trasă deoarece forţa de frecare este egală cu forţa de tracţiune în modul şi de sens opus acesteia.*

Experienţele conduc la următoarele legi ale frecării:
1. Forţă maximă de aderenţă f_S şi forţa de frecare la alunecare f_c între două corpuri nu depind de aria suprafeţei de contact dintre corpuri.
2. Forţă maximă de aderenţă f_S şi forţa de frecare la alunecare f_c sunt proporţionale cu forţa de apăsare normală care se exercită între corpuri la suprafaţa lor de contact:

$$\begin{cases} f_s = \mu_s N, \\ f_c = \mu_c N, \\ f_s > f_c \Rightarrow \mu_s > \mu_c \end{cases} \qquad (3.23)$$

unde μ_s este coeficientul de aderenţă, iar μ_c este coeficientul de frecare la alunecare.

Dacă aşezăm un corp pe un plan înclinat, atunci unghiul maxim de echilibru φ_s este dat de

$$tg\varphi_s = \mu_s \qquad (3.24)$$

şi se numeşte unghi de aderenţă. La fel, unghiul planului înclinat pentru care corpul alunecă uniform φ_c este dat de

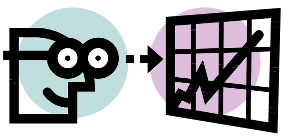
$$tg\varphi_c = \mu_c \qquad (3.25)$$

şi se numeşte unghi de frecare la alunecare. În probleme de statică (echilibru cu frecare) sau de rostogolire fără alunecare intervine μ_s, iar în probleme de cinematică în care apare alunecare intervine μ_c.

3.5.1. Problema rezolvată 2

Problemele cu frecări trebuie analizate cu atenţie. Lucrul mecanic al forţelor de frecare este negativ şi contribuie la diminuarea energiei mecanice .

Cum urcă un automobil pe un plan înclinat (pe o şosea în pantă)?



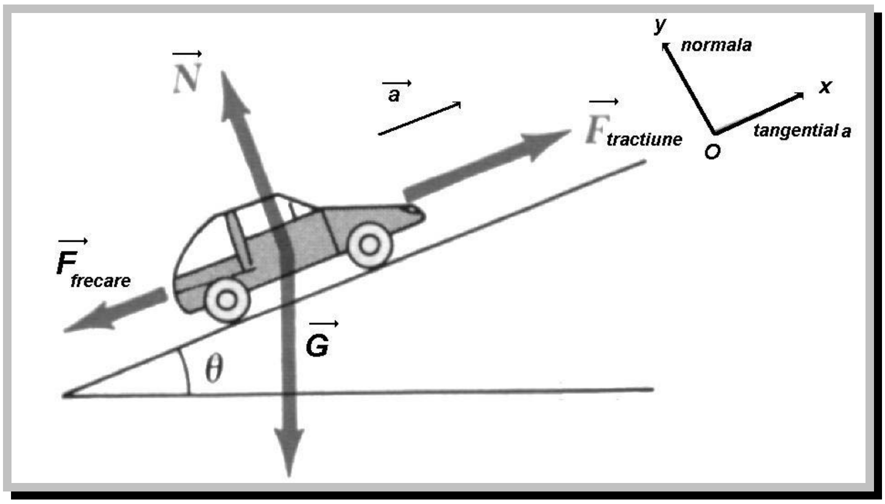


Figura 3.11

În acel caz ridicarea este asigurată de, forţa de tracţiune (care este reacţiunea planului - şoselei asupra vehiculului sau altfel spus *frecarea statică).*

$$\vec{F}_{tracţracţ} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{falunecare} = m\vec{a} \qquad (3.26)$$

Forţa de frecare la alunecare provine din frecarea părţilor ne-tractoare ale vehiculului (remorci, puntea din spate etc.). În absenţa acestora, $F_{flunecare}$ nu mai există. Frecarea are roluri diferite în deplasarea maşinii. Dacă tracţiunea maşinii este „pa faţă”, realizată de roţile din faţă, frecarea roţilor din faţă pe şosea este forţa care „agaţă” maşina de

şosea şi reacţiunea şoselei face maşina să urce. Forţa maximă de tracţiune nu poate depăşi frecarea la nivelul roţilor din faţă. Aşa cum ştii, dacă se încearcă o accelerare prea mare a maşinii la plecare, roţile motoare patinează, scârţâie.
Frecarea roţilor din spate pe şosea „împiedică” maşina – se opune urcării acesteia. Pe direcţia paralelă cu direcţia de deplasare, mişcarea este descrisă de ecuaţia

$$F_{tracţracţ} - G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha = ma_{deal} \qquad (3.27)$$

După determinarea acceleraţiei poţi scrie legile de mişcare ale maşinii

$$\begin{cases} (t) = v_{0,\tan gent} + a_{deal}\cdot t \\ x(t) = x_0 + v_{0,\tan gent}\cdot t + \dfrac{a_{deal}t^2}{2} \end{cases} \qquad (3.28)$$

Relaţii similare vei scrie şi pentru coborâre. În cazul coborârii însă trebuie să ai în vedere faptul că greutatea tangenţială nu se mai opune mişcării ci o ajută . Modalitatea naturală de alegere a axelor de coordonate este una în care o direcţie este paralelă cu direcţia de mişcare şi are sensul acestei mişcări, iar cealaltă direcţie este perpendiculară pe prima. Acest mod de tratare face însă ca expresiile acceleraţiilor pentru urcare şi coborâre să nu poată fi comparate direct deoarece se referă la sistem de axe diferite. Este totuşi preferabil să deducem, rapid, de fiecare dată acceleraţia corespunzătoare problemei propuse.

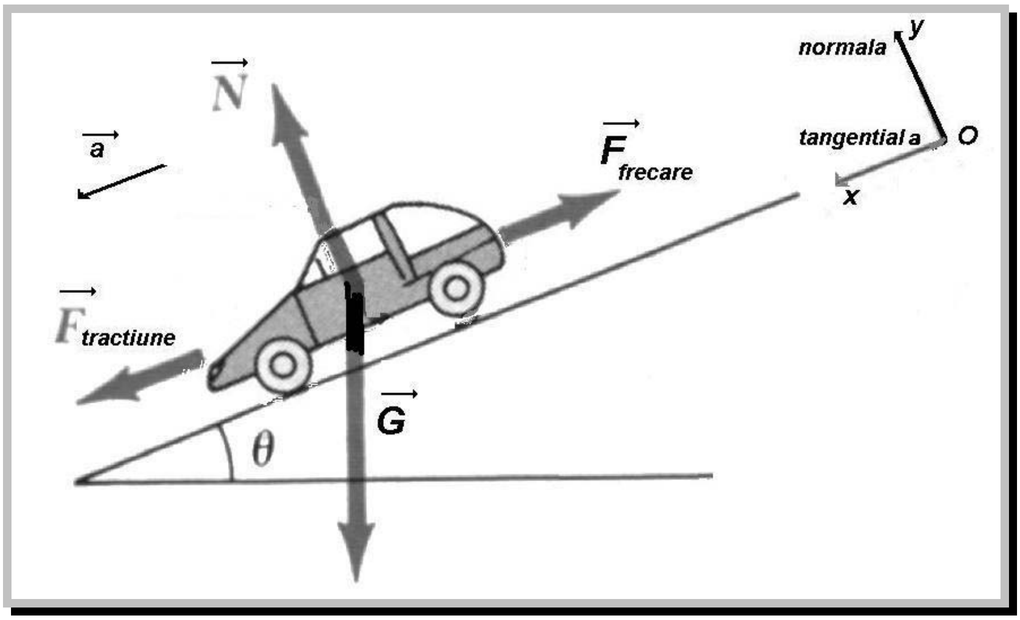


Figura 3.12

$$F_{tracţracţ} + G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha = ma_{vale} \qquad (3.29)$$

Legile de mişcare corespunzătoare sunt

$$\begin{cases} (t) = v_{0,\tan gent} + a_{vale}\cdot t \\ x(t) = x_0 + v_{0,\tan gent}\cdot t + \dfrac{a_{vale}t^2}{2} \end{cases} \qquad (3.30)$$

3.5.2. Problema rezolvată 3

Pe o suprafaţă plană, orizontală, se află un stâlp cilindric de rază R, aşezat vertical. De acest stâlp este ataşată o sfoară lungă (un fir, întins) de lungime iniţială ℓ_0 fir a cărui lungime curentă o vom nota cu ℓ, pe măsură ce firul se va înfăşura pe stâlp. La capătul depărtat de stâlp se află un corp (mic, de masă m), care poate aluneca fără frecare pe suprafaţa orizontală. Corpul este lansat cu o viteză iniţială v_0 perpendicular pe direcţia firului şi corpul începe o mişcare de rotaţie, în acelaşi timp firul înfăşurându-se pe stâlp.

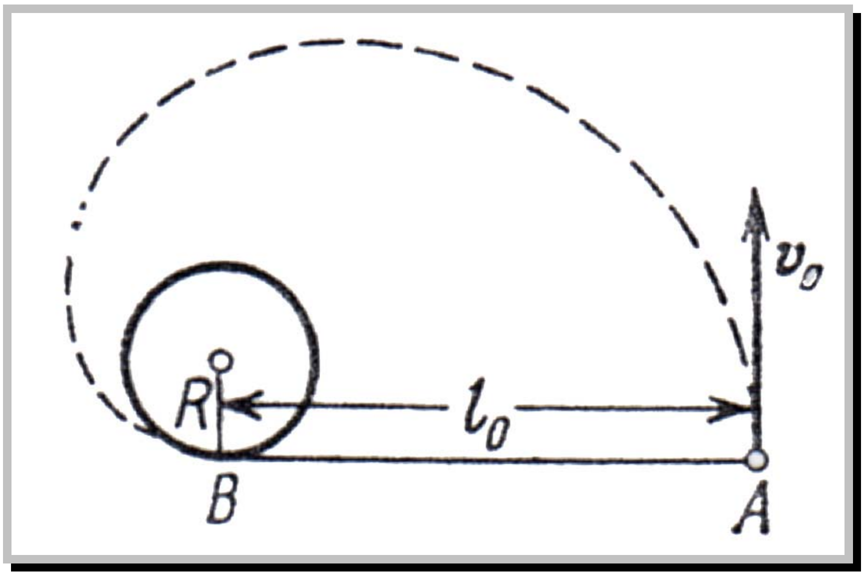


Figura 3.13

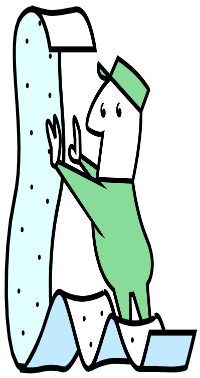
Analizează puţin enunţul încercând să obţii cât mai multe informaţii din enunţul acestei probleme. Rezolvarea problemei trebuie să-ţi permită să determini traiectoria corpului de la capătul firului, să calculezi cu ce viteză se mişcă acesta şi cum evoluează în timp, şi - în particular - când, (după cât timp) se înfăşoară integral pe stâlp.

Dacă pe parcursul rezolvării se vor apare alte întrebări încearcă să le rezolvi

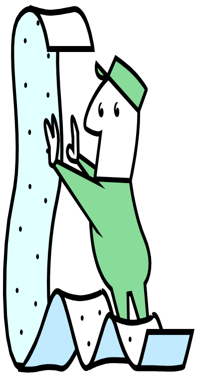
Prin acest mod de a începe o problemă, cu o situaţie poate mai puţin suficient descrisă, cu întrebările formulate mai vag, îţi propun o metodă interactivă, care ar putea deveni şi o sugestie pentru modul de lucru cu elevi sau cu alţi cursanţi. Aspectul interactiv constă în faptul că pe măsură ce rezolvarea avansează ar putea să survină şi alte idei sau şi alte întrebări.

Întrebarea întâi: *dacă viteza iniţială v_0 nu ar fi orientată perpendicular pe direcţia firului care ar fi continuarea "problemei", respectiv, cum ar începe să se mişte corpul?*
Întrebarea 2: *în poziţia iniţială de pornire firul este tangent la cilindru? Un fir întins ar putea să fie "altfel"? Pe măsură ce se "roteşte" şi se înfăşoară firul rămâne oare, tangent?*
Întrebarea 3: ("cu efecte mai târzii") *Care din datele problemei ar fi afectate ori modificate, dacă mişcarea ar avea loc cu frecare? Am putea rezolva problema? Sau, care părţi ale problemei ar avea aceeaşi rezolvare?*
Pentru o bună vizualizare a problemei vei considera un desen "văzut de sus". Asupra corpului acţionează următoarele forţe: greutatea, $\vec{G}$, o reacţiune, normală din partea planului suport, $\vec{N}$,- aceste forţe sunt orientate pe direcţia verticală, deci nu sunt evidente, vizibile în desenul "văzut de sus"- apoi, din partea firului de legătură o tensiune (în fir), $\vec{T}$, care are rolul de *forţă centripetă* pentru mişcarea corpului, şi – în funcţie de cum ne decidem să continuăm rezolvarea problemei – o *forţă centrifugă de inerţie*, $\vec{F}_{cf,inertie}$ (sau nu). (Acest *"sau nu"* depinde de faptul dacă în rezolvarea unor probleme dorim să folosim forţele de inerţie. Din punct de vedere *sintetic, teoretic* acest lucru nu este necesar, întotdeauna existând o rezolvare fără forţe de inerţie. Din punct de vedere didactic, autorul (şi evident, nu numai el) consideră că forţele de inerţie şi rezolvările într-un *sistem de referinţă neinerţial* pot fi mai sugestive, mai uşor de asimilat, de vizualizat, mai potrivit scopului didactic al realizării unui cadru cât mai "prietenos" rezolvărilor.

Ori de câte ori o soluţie "clasică", fără forţele de inerţie, este la îndemână, aceasta va fi prezenta în paralel, pentru a compara cele două căi şi pentru a consolida introducerea forţelor de inerţie.



Este mişcarea corpului uniformă pe traiectorie? Adică modulul vectorului viteză rămâne constant? (Pentru că, în mod evident viteza ca vector nu rămâne constantă, schimbând permanent direcţia). Dacă nu există frecări, şi am convenit să examinăm pentru început această posibilitate, în decursul mişcării nu există forţe disipative, nu există pierdere de energie mecanică. Atunci energia mecanică se conservă, şi dacă vei scrie că o eventuală variaţie a energiei cinetice este dată de lucrul mecanic al tuturor forţelor care acţionează asupra corpului rezultă
$\Delta E_{cinetica} = L_{forte}$
În cazul aflat în discuţie, forţele care acţionează asupra corpului de masă ***m*** sunt:
greutatea, $\vec{G}$, normala din partea planului suport, $\vec{N}$**,** aceste forţe fiind orientate pe direcţia verticală, şi, din partea firului de legătură, tensiunea $\vec{T}$ **.** Dar greutatea şi normala sunt perpendiculare pe planul mişcării deci unghiul făcut de fiecare din ele cu deplasarea (cu viteza) este de $\pi/2$, cosinusul acestui unghi este zero, şi lucrul mecanic al acestor forţe (sau contribuţia lor la modificarea energiei potenţiale) este nul.



$$\begin{cases} L_G = \vec{G} \cdot \vec{s} = G \cdot s \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ L_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = N \cdot s \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

dar şi

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{s} = Ts\cos\frac{\pi}{2}$$

deoarece deplasarea este perpendiculară pe fir şi deci şi tensiunea pe viteza corpului. Aceasta înseamnă că variaţia de energie cinetică este zero. Energia cinetică se conservă, rămâne constantă, atunci şi "pătratul" vitezei rămâne constant, respectiv viteza ca modul. Răspunsul este, da, viteza este constantă, mişcarea este uniformă pe traiectorie.

Şi avem şi un al doilea răspuns, dacă sunt frecări, energia mecanică şi energia cinetică nu se mai conservă şi mişcarea nu mai este uniformă, viteza o să scadă, corpul ar putea să se oprească înainte de "terminarea" firului, înainte de a ajunge la stâlpul central. Dacă am cunoaşte traiectoria şi o modalitate de a aprecia lungimea traseului parcurs pe această spirală, (pentru că aşa pare să arate traiectoria), am putea spune unde se opreşte corpul. Şi cu şi mai multă strădanie, după cât timp se opreşte corpul.

Observă că firul se scurtează (cu $d\ell$) pentru că se înfăşoară pe axul central, deci porţiunea înfăşurată (notată db) coincide cu scăderea lungimii firului şi, pentru un interval de timp scurt, *dt*:

$$d\ell = -db \qquad (3.31)$$

dar

$$db = R \cdot d\alpha \qquad (3.32)$$

$d\alpha$ fiind unghiul la centru măturat în timpul, scurt, *dt*. Semnul minus ne arată că în timp ce unghiul măturat, unghiul la centru α creşte, lungimea ℓ a firului scade. Între direcţiile firului , după trecerea timpului *dt* unghiul este de asemenea $d\alpha$.

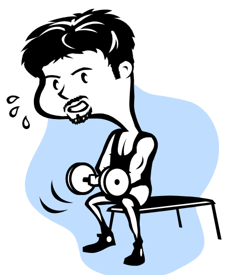
Înseamnă că spaţiul parcurs de mobil (în timpul *dt*, scurt) este identic cu cel descris pe un arc de cerc de rază ℓ , un cerc cu centrul în punctul de "desprindere" a firului

$$ds = \ell \cdot d\alpha \qquad (3.33)$$

dar *ds* este parcurs cu viteza $v = v_0$, deci

$$ds = v \cdot dt \qquad (3.34)$$

viteza ori timpul. Astfel ai reuşit să introduci timpul în ecuaţiile care descriu mişcarea. Egalând expresiile pentru $d\alpha$ rezultă



$$-\frac{d\ell}{R} = \frac{v \cdot dt}{\ell} \qquad (3.35)$$

pentru început o relaţie diferenţială, o ecuaţie diferenţială care mai poate fi scrisă sub forma

$$-\ell \cdot d\ell = Rvdt \qquad (3.36)$$

care "integrată" conduce la

$$\frac{\ell^2}{2} = -R \cdot v \cdot t + \wp \qquad (3.37)$$

unde $\wp$ este o constantă de integrare. Dar la momentul iniţial $t = 0$

$$\ell = \ell_0 \qquad (3.38)$$

şi deci

$$\wp = \frac{\ell_0^2}{2} \qquad (3.39)$$

rezultă rearanjând că

$$\ell_0^2 - \ell^2 = 2R \cdot v \cdot t \qquad (3.40)$$

Prin urmare, durata totală a mişcării ”până când se consumă firul”

$$\ell(t_{total}) = 0 \qquad (3.41)$$

este:

$$t_{total} = \frac{\ell_0^2}{2Rv} \qquad (3.42)$$

Dacă frecările există? Forţa de frecare de alunecare este constantă,

$$F_{frecare} = \mu \cdot N = \mu \cdot G \qquad (3.43)$$

Şi în acest caz, este îndreptată împotriva mişcării producând o acceleraţie:

$$\begin{cases} -F_{frecare} = m \cdot a_{tangential} \\ -\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_{tangential} \\ a_{tangential} = -\mu \cdot g \end{cases} \qquad (3.44)$$

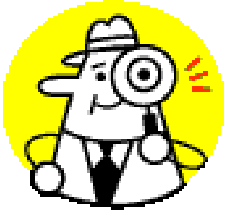
atunci durata totală a mişcării în ipoteza că firul nu reuşeşte să se înfăşoare integral, este timpul scurs până la anularea vitezei. Dar

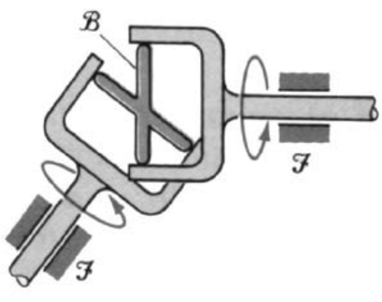
$$v(t) = v_0 - \mu \cdot g \cdot t \qquad (3.45)$$

şi deci timpul până la oprire este:

$$T_{oprire} = \frac{v_0}{\mu \cdot g} \qquad (3.46)$$

iar spaţiul, de-a lungul traiectoriei, se poate obţine cu ajutorul formulei lui Galilei (aplicabilă dacă acceleraţia este constantă şi în această problemă aceasta este situaţia) sau, cu ajutorul teoremei energiei cinetice.





$$\begin{cases} \Delta E_{cinetica} = L_{forta\,de\,frecare} \\ \Delta E_{cinetica} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot S_{oprire} \\ \left[0 - \dfrac{m \cdot v_0^2}{2} \right] = -\mu \cdot m \cdot g \cdot S_{oprire} \\ S_{oprire} = \dfrac{v_0^2}{2\mu \cdot g} \end{cases} \quad (3.47)$$

Soluţia este corectă numai după ce se confirmă că T_{oprire} este mai mic decât t_{total}, şi anume t_{total} pentru cazul mişcării cu frecare.
Ecuaţia (3.36)se rescrie,

$$-\ell \cdot d\ell = Rvdt = R(v_0 - \mu gt)dt \quad (3.48)$$

care după desfacerea parantezei se poate integra la fel de uşor ca aceea din situaţia cu frecare neglijabilă şi:

$$\frac{\ell^2}{2} = -Rv_0 t + \frac{R \cdot \mu \cdot g \cdot t^2}{2} + \wp \quad (3.49)$$

sau

$$\ell_0^2 - \ell^2 = -2Rv_0 t + R \cdot \mu \cdot g \cdot t^2 \quad (3.50)$$

anularea lui ℓ, lungimea firului, conducând la t_{total}.

Ori de câte ori întâlneşti o ecuaţie de gradul doi, în t, ar trebui să te întrebi care din soluţii este cea a problemei-sau dacă nu cumva amândouă au sens. Acest „amândouă" este totuşi destul de rar, mai ales la mecanică.

În cazul despre care vorbim, soluţia corectă ar fi aceea care pentru $\mu = 0$, (absenţa frecărilor), conduce la soluţia 3.46.

Rezolvă şi vei constata că "alegerea" nu este chiar imediată.
Te-ai descurcat?
Această problemă, dincolo de rezolvarea ei, poate fi un model al discuţiei care să te conducă la concluziile privind mişcarea uniformă. Adică pornind de la teoreme.

$$\begin{cases} t_{1,2} = \dfrac{2Rv_0 \pm \sqrt{4R^2v_0^2 + 4\ell_0^2 R\mu g}}{2R\mu g} \\ t_{1,2} = \dfrac{-\ell_0^2 R\mu g}{R\mu g\left(Rv \mp \sqrt{R^2v_0^2 + \ell_0^2 R\mu g}\right)} \\ t_{1,2} = \dfrac{\ell_0^2}{\left(Rv \mp \sqrt{R^2v_0^2 + \ell_0^2 R\mu g}\right)} \end{cases} \quad (3.51)$$

Pentru $\mu = 0$ Soluţia devine

$$t_{1,2} = \frac{\ell_0^2}{(Rv \mp Rv)} \quad (3.52)$$

Evident, soluţia corectă este

$$t_{1,2} = \frac{\ell_0^2}{\left(Rv + \sqrt{R^2 v_0^2 + \ell_0^2 R\mu g}\right)} \tag{3.53}$$

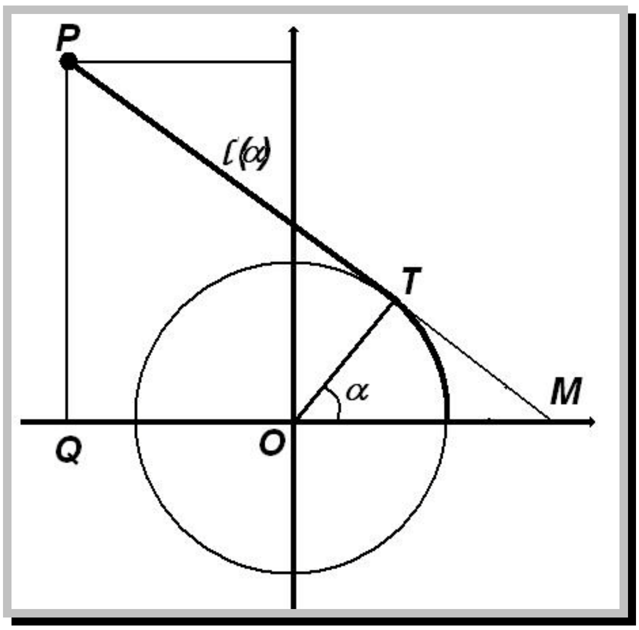
În activitatea şcolară această problemă se poate întâlni pornind de la un stâlp central prismatic, adică având ca secţiune transversală un poligon regulat: pătrat ca primă figură, dar de ce nu şi un triunghi echilateral, ca a doua opţiune, şi apoi pentagon, hexagon - până la generalizarea poligonului cu un număr infinit de laturi – ***cercul*** .

A rămas de discutat câte ceva despre traiectorie, ecuaţia (ecuaţiile) ei, şi poate şi altele. Desenele care însoţesc problema, "au pregătit terenul" pentru o descriere a traiectoriei. Preferabile ar fi o descriere carteziană – cu două ecuaţii

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{3.54}$$

dar acestea nu sunt imediate. Descrierea foarte potrivită este o descriere parametrică, folosind coordonate polare – lungimea firului şi unghiul la centru, unghiul α, care se "leagă" şi cu poziţia firului şi cu poziţia punctului de contact. Ar fi ar fi de căutat de asemenea descrierea

$$\begin{cases} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \end{cases} \tag{3.55}$$



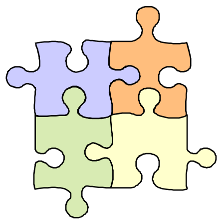


Figura 3.14

Când raza vectoare a punctului de contact al firului cu cilindrul este *T,* lungimea firului *PT* are expresia

$$\ell = \ell_0 - R \cdot \alpha \tag{3.56}$$

Din considerente geometrice evidente,

$$\begin{cases} OM = \dfrac{R}{\cos\alpha} \\ TM = R\cdot tg\alpha \\ PM = R\cdot tg\alpha + \ell_0 - R\cdot\alpha \end{cases} \quad (3.57)$$

Prin urmare

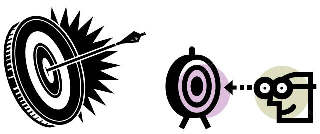
$$\begin{cases} QM = PM\cdot\sin\alpha \\ QP = PM\cdot\cos\alpha \end{cases} \quad (3.58)$$

şi coordonatele carteziene ale punctului *P* în care se află corpul mic sunt

$$\begin{cases} x = R - (R\cdot tg\alpha + \ell_0 - R\alpha)\cdot\sin\alpha \\ y = (R\cdot tg\alpha + \ell_0 - R\alpha)\cdot\cos\alpha \end{cases} \quad (3.59)$$

3.6. *Test de autoevaluare 3.1.*

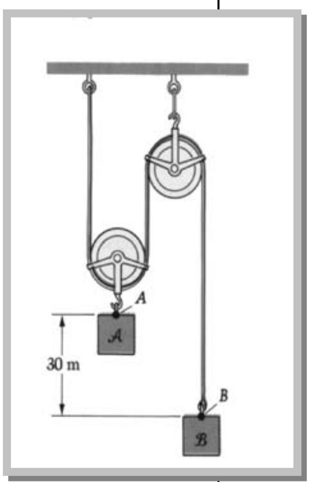
Răspunde la următoarele întrebări:



1. Ce este inerţia?

2. Care este enunţul principiului II al dinamicii?

3. Cum se enunţă principiul III al dinamicii?



4. Care este relaţia de definiţie a forţei de frecare?

5. Punctul *B* al blocului se deplasează în sus cu acceleraţia constantă de 10m/s^2. În situaţia prezentată în figura din stânga, între nivele punctelor A şi B sunt 30m. În acest moment vitezele corpurilor sunt nule. Determină vitezele corpurilor când trec unul prin dreptul celuilalt

Răspunsurile le găseşti la pagina 68

3.7. *Lucrare practică*

Verificarea principiului trei al dinamicii.

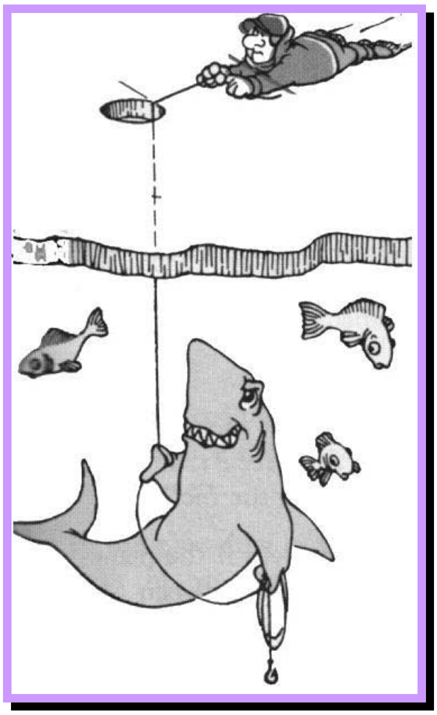


Figura 3.15 Peşte şi pescar

Principiul trei, al acţiunii şi reacţiunii, spune că dacă un corp acţionează cu o forţă asupra altui corp, acesta la rândul lui reacţionează cu o forţă egală dar de sens contrar.

Ia două „dinamometre” care pot fi foarte bine două cântare de piaţă din cele cu resort, fie cu ac rotativ sau cu cursor. Agaţă cele două dinamometre unul de celălalt, în serie am zice, şi trage de ele. Cu ajutorul celorlalţi participanţi, notează indicaţiile celor două dispozitive.
Dacă cele două cântare sunt bine etalonate cum vor fi indicaţiile?
Dar dacă legi trei sau patru cântare?

Găseşte arcuri identice – de exemplu de la pixuri identice. Verifică faptul că se deformează la fel sub aceeaşi acţiune.

Imaginează experimente cu resoarte înseriate sau puse în paralel.

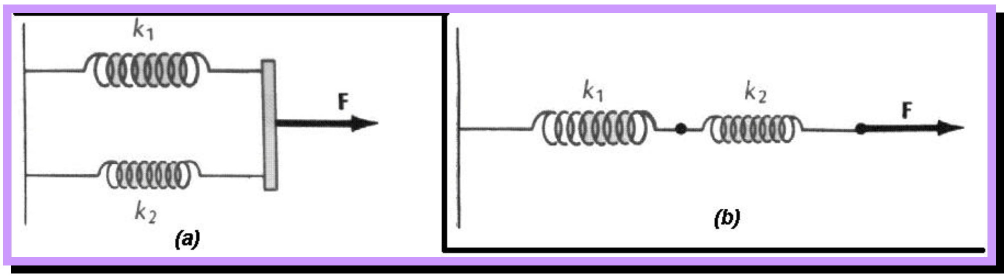


Figura 3.16

Figura 3.17 Emisferele de Magdeburg, închise şi apoi vidate, nu au putut fi desfăcute deşi s-a tras de ele cu multe perechi de cai.

3.8. *Răspunsuri la testul de autoevaluare3.1.*

1. Inerţia este proprietatea corpurilor de a-şi păstra starea de echilibru sau de mişcare rectilinie uniformă atât timp cât asuprea lor nu acţionează forţe externe.

2. Dacă aplicăm unui punct material diferite forţe $\vec{F}$, punctul material capătă acceleraţii $\vec{a}$ coliniare şi proporţionale cu forţele aplicate: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, unde m este un parametru pozitiv, caracteristic punctului material, numit masă.

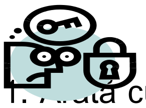
3. Fiecărei acţiuni i se opune întotdeauna o reacţiune, egală în modul şi de sens contrar, sau altfel, acţiunile reciproce a două corpuri (puncte materiale) sunt întotdeauna egale în modul şi orientate în sensuri opuse.

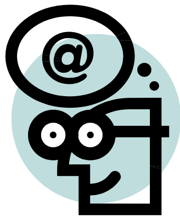
4. $F_f = \mu N$ Forţa de frecare este proporţională cu apăsarea normală şi depinde de natura corpurilor în contact.

5. $m_2 = 8m_1; v_A = 20m/s; v_B = 10m/s$

3.9. *Lucrare de verificare 3*

Rezolvă cerinţele de mai jos şi trimite tutorelui rezultatele pe care le consideri corecte.





1. Arată cum se pot deduce prevederile principiului unu din aplicarea principiului doi. *(1 punct)*

2. Formulează un comentariul propriu privitor la principiul 3. *(1 punct)*

3. Formulează comentariul propriu privitor la principiul 2 în sisteme neinerţiale *(1 punct)*

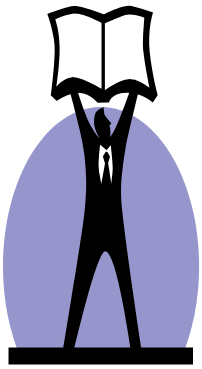
4. Scrie expresia matematică a principiului 2 explicând semnificaţiile mărimilor folosite *(1 punct)*

5. Un corp de masă m=100 kg este tras de o forţă F = 400 N sub un unghi $\alpha=30^0$ faţă de orizontală. Care este acceleraţia corpului, dacă unghiul de frecare este $\varphi=15^0$? Sub ce unghi trebuie să tragem corpul astfel încât acceleraţia să fie maximă? *(2 puncte)*

6. Efectuează lucrarea practică. Folosind un editor de texte scrie un protocol al observaţiilor şi măsurărilor efectuate. Notează datele numerice şi comentează-le. *(3 puncte)*

Notă: Se va acorda un punct din oficiu

Total 10 puncte



3.10. *Bibliografie*

1.A. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a), pag. 52-90

2.A. P. Hristev, V. Fălie, D. Manda, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984, pag. 60-100

3,***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983, pag. 4-9

3.11. *Termeni şi expresii cheie. Formule cheie.*

Termeni şi expresii cheie

❖ **Inerţia;**
❖ **Sisteme de referinţă inerţiale; sisteme de referinţă neinerţiale;**
❖ **Efectele statice ale forţelor; Efectele dinamice ale forţelor;**
❖ **Coeficient de aderenţă; coeficient de frecare la alunecare;**
❖ **Unghi de aderenţă; unghi de frecare;**

Formule cheie

❖ **Transformarea lui Galilei** $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 + \vec{u}(t' + t_0)$

$$t = t' + t_0$$

❖ **Expresia matematică a legii clasice de compunere a vitezelor** $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$;

❖ **Expresia matematică a legii clasice de compunere a acceleraţiilor** $\vec{a} = \vec{a}\,'$;

❖ **Expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii** $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Principii şi legii cheie

❖ **Principiul I - principiul inerţiei;**
❖ **Principiul al II-lea - principiul fundamental;**
❖ **Principiul al III-lea – principiul acţiunilor reciproce;**
❖ **Legile frecării;**